S.T.I.D. 1ère Année **15 mai2009**

IUT2 Grenoble
Université Pierre-Mendès-France

EPREUVE D'ANALYSE **(durée : 2 heures)**

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Veuillez indiquer vos nom, prénom et groupe, sur chaque copie. Seul le formulaire est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. 1) $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{8x+1}dx$ à l'aide du changement de variable : $u = 8x+1$

1. 2) $I_2 = \int_0^1 (x^2+x)e^{2x}dx$ à l'aide d'une ou plusieurs IPP.

Exercice 2

On pose pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$, et $I_0 = e-1$.

2. 1) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad I_n \geqslant 0$.

2. 2) Etablir, à l'aide d'une IPP que pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

2. 3) Déduire des questions précédentes que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

2. 4) A l'aide de la récurrence, calculer I_1, I_2 et I_3

2. 5) Montrer que la suite I_n est décroissante.

2. 6) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in N}$?Justifier.

Exercice 3

3. 1) Effectuer la division euclidienne de x^4 par le polynôme x^3+x^2+x+1.

3. 2) Déterminer les coefficients manquants dans la décomposition suivante:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

3. 3) Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

Exercice 4

Ecrire les développements limités à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions :

4. 1) $f(x) = (1-x^2)^{1/4}$

4. 2) $g(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos x}$

Exercice 5

A l'aide de développements limités à l'ordre suffisant, déduire les limites suivantes :

5. 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{\sin(x)-x}$

5. 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\ln(1+x^2)}$

Exercice 6

$$\text{Soit} \quad u_n = \frac{2}{4n^2 - 1} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6. 1) Déterminez deux constantes a, b telles que $u_n = \dfrac{a}{2n-1} + \dfrac{b}{2n+1}$.

6. 2) Déduire l'expression de la somme partielle $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

6. 3) La série $\sum u_n$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$?

Exercice 7

7. 1) A l'aide d'une minoration ou d'un calcul de limite déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n\cos^2(n)}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{2n+1}$

7. 2) Utiliser les critères énoncés dans le formulaire pour déduire la nature des séries :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^{2n}$

Exercice 8

$$\text{On pose } I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt.$$

8. 1) En comparant cette intégrale à une série, montrer qu'elle est convergente (valeur finie).

8. 2) A l'aide d'une IPP donner une relation de récurrence sur les I_k.

8. 3) Calculer I_0, pui en déduire I_k en fonction de k.

FORMULAIRE :

Tableaux de dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n $\quad n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	e^{ax} $\quad a \in \mathbb{R}$	ae^{ax}
x^α $\quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	a^x $\quad a \in \mathbb{R}^{+*}$	$(\ln a)a^x$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x$ $\quad x \in \mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos\ x$	$\arcsin\ x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin\ x$	$\arccos\ x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$\arctan\ x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Tableaux de primitives

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\,dx$	$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\,dx$
x^n $\quad n \in \mathbb{N} - \{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	e^{ax} $\quad a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$
x^α $\quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	a^x $\quad a \in \mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{\ln a}a^x$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\ln x$ $\quad x \in \mathbb{R}^{+*}$	$x\ \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos\ x$		
$\cos x$	$\sin\ x$		
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$		

Développements limités au voisinage de 0

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$
$$\sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$
$$\cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

Propriétés de convergence des séries à termes positifs :

prop. 1 (conparaison avec une intégrale) : Soit f est une fonction continue positive et décroissante sur $[a, +\infty[$. Si on pose $u_n = f(n)$ pour tout n entier $\geq a$:

alors la série $\sum_{n\geq a} u_n$ et l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

prop. 2 (conparaison avec une autre série) : Si les termes u_n et v_n de deux séries à termes positifs vérifient :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1, \qquad v_n \neq 0$$

alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

prop. 3 : Si les termes u_n d'une séries à termes positifs (non nuls) vérifient

le critère de d'Alembert : ou bien le critère de Cauchy :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$$

alors :

8. 1) si $\ell < 1$ la série $\sum u_n$ est convergente.

8. 2) si $\ell > 1$ la série $\sum u_n$ est divergente.

8. 3) si $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.