

# Angles géométriques, angles orientés, théorème de l'angle inscrit

## Rappels et notations

On reprend les notations du chapitre 1, le plan est toujours noté  $E$ . On reprend aussi les axiomes d'incidence et d'ordre d'Euclide et Hilbert (voir [E] ou [H]) : points, droites, demi-droites, demi-plans, etc. On va maintenant passer aux aspects métriques. Il y a de multiples façons de présenter les nouveaux axiomes à introduire. Dans la géométrie d'Euclide, il y a, de manière implicite, l'existence d'un groupe de mouvements, simplement transitif sur les drapeaux. Dans d'autres versions, par exemple celle de Cousin-Fauconnet, voir [CF], on se donne une distance, mais il faut aussi un axiome assurant l'homogénéité, par exemple l'existence de suffisamment de réflexions.

Dans ce qui suit, on va supposer qu'on détient les deux choses : une distance et des isométries transitives.

## 1 Distance et isométries

Ce paragraphe est délibérément succinct et a pour seul but de rappeler quelques définitions et quelques propriétés utiles. Il est bien clair que les axiomes énoncés ici sont insuffisants<sup>1</sup>.

Rappelons qu'une **distance** sur un ensemble  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $\mathbf{R}^+$  qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- 1) On a  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ .
- 2) On a  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- 3) On a  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

**1.1 Axiome.** *Sur le plan  $E$  on se donne une distance  $d$  qui vérifie les propriétés supplémentaires suivantes :*

1) *On a  $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$  si et seulement si  $x, y, z$  sont alignés avec  $z$  entre  $x$  et  $y$ .*

2) *Soit  $D$  une droite et  $a \in D$ . Pour tout réel  $\lambda > 0$  il existe exactement deux points  $x, y$  de  $D$ , situés de part et d'autre de  $a$ , tels que  $d(a, x) = d(a, y) = \lambda$ .*

**1.2 Remarque.** On note le plus souvent  $ab$  la distance de  $a$  à  $b$ . C'est aussi, par définition, la longueur du segment  $[ab]$ .

Une **isométrie** de  $E$  muni de la distance  $d$  est une bijection  $u$  qui conserve la distance :  $d(u(x), u(y)) = d(x, y)$  pour tous  $x, y \in E$ . L'ensemble des isométries de  $E$  forme un groupe noté  $\text{Is}(E)$ .

---

1. Un jour peut-être j'écrirai tout cela de manière cohérente, voir [Axiomes].

**1.3 Proposition.** *Les isométries de  $E$  conservent l'alignement, transforment un segment en un segment, une demi-droite en une demi-droite et un demi-plan en un demi-plan.*

*Démonstration.* Soit  $u$  une isométrie. Si  $x, y, z$  sont alignés et distincts, l'un des points, disons  $z$ , est entre les autres. On a donc  $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$ , donc aussi  $d(u(x), u(y)) = d(u(x), u(z)) + d(u(y), u(z))$  par conservation de  $d$ . Il en résulte que  $u(x), u(y)$  et  $u(z)$  sont alignés. Le même raisonnement donne le cas du segment et de la demi-droite et on en déduit le demi-plan par définition de celui-ci.

On appelle **drapeau** un triplet  $(x, \delta, F)$  formé d'un point  $x$  de  $E$ , d'une demi-droite  $\delta$  de  $E$  d'origine  $x$  et d'un demi-plan  $F$  limité par  $\delta$ .

**1.4 Axiome.** *On suppose que le groupe  $\text{Is}(E)$  est simplement transitif sur les drapeaux, ce qui signifie qu'étant donnés deux drapeaux  $(x, \delta, F)$  et  $(x', \delta', F')$  il existe une unique isométrie  $u$  qui envoie  $x$  sur  $x'$ ,  $\delta$  sur  $\delta'$  et  $F$  sur  $F'$ .*

On déduit de cet axiome l'existence et les premières propriétés des symétries axiales :

**1.5 Proposition.** *Soit  $D$  une droite,  $o$  un point de  $D$ ,  $\delta$  une des demi-droites d'origine  $o$  portée par  $D$ ,  $E^+$  et  $E^-$  les deux demi-plans limités par  $D$ . L'unique isométrie qui envoie le drapeau  $(o, \delta, E^+)$  sur  $(o, \delta, E^-)$  fixe la droite  $D$ . On l'appelle symétrie (ou réflexion) d'axe  $D$  et on la note  $\tau_D$ . Elle est involutive (i.e. on a  $\tau_D^2 = \text{Id}$ ).*

*Démonstration.* Si on prend  $a \in \delta$ , il est transformé en un point  $b$  de  $\delta$  avec  $oa = ob$ , donc  $a = b$ . Le raisonnement est le même de l'autre côté. Le fait que  $\tau_D$  soit involutive vient de l'unicité dans 1.4.

## 1.1 Cercles et arcs

Avec la notion de distance vient aussitôt celle de cercle : le cercle de centre  $a$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $x$  tels que  $d(a, x) = R$ . On peut aussi définir les arcs de cercle (comme intersection d'un cercle et d'un secteur) et mesurer leur longueur. Je renvoie pour ce point au papier [S] sur ma page web. L'idée est simple (mais demande quelques précisions) : la longueur d'un arc est la borne supérieure des longueurs des lignes brisées inscrites dans cet arc.

Un résultat important est le suivant :

**1.6 Proposition.** *Soit  $C$  un cercle de centre  $o$  et de rayon  $R$  et soient  $a, b, c \in C$ . On suppose que  $b$  est dans le "petit arc"  $\widehat{ac}$ . Cela signifie que  $b$*

est dans le secteur saillant  $[\widehat{aoc}]$ . Alors, on a la formule d'addition sur les longueurs d'arcs :  $\widehat{ac} = \widehat{ab} + \widehat{bc}$ .

On définit aussi le disque de centre  $a$  et de rayon  $R$  comme l'ensemble des points dont la distance à  $a$  est  $\leq R$ . Un disque est convexe.

## 2 Angles géométriques

On sait ce qu'est un secteur  $[\widehat{aob}]$  (y compris le secteur nul et le secteur plat) et si l'on a deux demi-droites  $[oa)$  et  $[ob)$  de même origine, on leur associe un secteur, unique sauf dans le cas plat. La question est d'associer à un secteur un invariant qui mesure sa taille. Il y a deux manières élémentaires de faire cela, sans compter l'entrée par l'algèbre linéaire.

### 2.1 Définitions

#### 2.1.1 La définition géométrique

On peut définir la notion "avoir même angle" pour deux secteurs saillants  $[\widehat{aob}]$  et  $[\widehat{a'o'b'}]$ . C'est simplement qu'il existe une isométrie qui envoie le point  $o$  sur  $o'$  et les demi-droites  $[oa)$  et  $[ob)$  respectivement sur  $[o'a')$  et  $[o'b')$ . Dans cette version, l'angle est donc une classe d'équivalence de secteurs (ou de couples de demi-droites). On définit aussi un ordre : un angle est plus petit qu'un autre si son secteur, après isométrie éventuellement, est contenu dans l'autre. Je n'utiliserai pas cette version.

#### 2.1.2 La définition métrique

On considère un secteur saillant  $[\widehat{aob}]$ . Quitte à changer  $a, b$  sur les demi-droites on peut supposer qu'on a  $oa = ob = 1$ . L'angle (géométrique, ou non orienté)  $\widehat{aob}$  est alors la longueur de l'arc de cercle  $\widehat{ab}$ , intersection du cercle de centre  $o$  et de rayon 1 et du secteur. Si on appelle  $2\pi$  la longueur du cercle unité, les angles sont alors des éléments de  $[0, \pi]$ .

#### 2.1.3 Les deux mon général

**2.1 Proposition.** *Les deux notions d'angles coïncident : on a  $\widehat{aob} = \widehat{a'o'b'}$  (au sens des longueurs d'arcs) si et seulement si il existe une isométrie qui envoie  $o$  sur  $o'$  et les demi-droites les unes sur les autres. En particulier, les isométries conservent les angles.*

*Démonstration.* Il est facile de voir que, si l'on a une isométrie, les angles sont égaux. Nous admettrons la réciproque.

### 2.1.4 Par l'algèbre linéaire

On renvoie à [DHP] pour ce point de vue, très efficace, mais inutilisable au niveau du collège et du lycée. La définition des angles géométriques repose sur celle de produit scalaire : l'angle  $\theta = \widehat{aob}$  est donné par la formule  $(\vec{oa} | \vec{ob}) = oa \times ob \times \cos \theta$ . On a donc  $\theta = \text{Arccos} \frac{(\vec{oa} | \vec{ob})}{oa \times ob}$ . C'est bien un élément de  $[0, \pi]$ .

## 2.2 Propriétés

On peut maintenant recopier une bonne partie des choses qui sont dans Euclide, voir [E], par exemple les cas d'isométrie des triangles, l'égalité des angles à la base du triangle isocèle, définir les angles supplémentaires, opposés par le sommet, etc. On peut aussi parler de perpendiculaires (angles égaux à  $\pi/2$ ). On a les propriétés des médiatrices, le cercle circonscrit, l'intersection d'une droite et d'un cercle et bien d'autres choses encore. C'est un bon exercice de rétablir tous ces points. Je rappelle juste quelques éléments importants.

### 2.2.1 Angles et parallèles

On commence par montrer le lemme suivant, qui ne nécessite pas le postulat d'Euclide (voir aussi [E] ou [GA]) :

**2.2 Lemme.** *Dans un triangle, la somme de deux angles est toujours  $< \pi$ .*

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde en supposant  $\widehat{abc} + \widehat{bac} \geq \pi$ . Soit  $[bx)$  la demi-droite opposée à  $[bc)$ . On a  $\widehat{abc} + \widehat{abx} = \pi$ , donc  $\widehat{abx} \leq \widehat{bac}$ . On peut donc reporter l'angle  $\widehat{abx}$  dans  $\widehat{bac}$  : il existe une demi-droite  $[ay)$  contenue dans l'angle  $\widehat{bac}$  telle que l'on ait  $\widehat{bay} = \widehat{abx}$ . Cette demi-droite coupe  $[bc)$  en  $d$  et on porte sur  $[bx)$  un point  $e$  tel que  $be = ad$ . Les triangles  $abe$  et  $bad$  sont isométriques d'où les égalités d'angles  $\widehat{eab} = \widehat{dba}$  et  $\widehat{ead} = \widehat{eab} + \widehat{bad} = \widehat{dba} + \widehat{abe} = \widehat{dbe} = \pi$ . L'angle  $\widehat{ead}$  étant plat,  $a$  serait aligné avec  $b$  et  $c$ , ce qui est absurde.

On en déduit le résultat sur les parallèles :

**2.3 Proposition.** *Soient  $D, D'$  deux droites parallèles,  $\Delta$  une droite qui coupe  $D, D'$  en  $a, a'$  respectivement.*

1) Soient  $x, x' \in D, D'$  situés dans des demi-plans différents par rapport à  $\Delta$ . On a  $\widehat{x'a'a} = \widehat{a'ax}$  (angles alternes-internes).

2) Soient, de plus,  $y' \in D'$ , de l'autre côté de  $\Delta$  par rapport à  $x'$  et  $z \in \Delta$ , de l'autre côté de  $a'$  par rapport à  $a$ . On a  $\widehat{za'y'} = \widehat{a'ax}$  (angles correspondants).

*Démonstration.* Si  $\widehat{x'a'a}$  est différent de  $\widehat{a'ax}$ , supposons par exemple qu'on a  $\widehat{x'a'a} > \widehat{a'ax} = \alpha$  et considérons la demi-droite issue de  $a'$  qui fait avec  $\Delta$  l'angle  $\alpha$ . Elle n'est pas portée par  $D'$ , donc elle coupe  $D$  en  $b$  (si elle était parallèle, on aurait deux parallèles à  $D$  passant par  $a'$ , c'est contraire au postulat d'Euclide). Mais alors, dans le triangle  $a'ab$ , la somme des angles en  $a'$  et  $b$  est égale à  $\pi$  (car c'est la somme des angles supplémentaires  $\widehat{baa'}$  et  $\widehat{xaa'}$ ).

## 2.2.2 La somme des angles du triangle

**2.4 Théorème.** *La somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$*

*Démonstration.* Menons par  $c$  la parallèle à  $(ab)$  et prenons un point  $d$  sur cette droite, du même côté que  $a$  par rapport à  $(bc)$ . Soit  $e$  un point de la demi-droite opposée à  $[cb)$ . On a les égalités d'angles :  $\widehat{bac} = \widehat{acd}$  (alternes-internes) et  $\widehat{abc} = \widehat{dce}$  (correspondants). L'angle plat  $\widehat{bce} = \pi$  est égal à  $\widehat{bca} + \widehat{acd} + \widehat{dce}$  par Chasles géométrique et on en déduit le résultat.

## 2.2.3 La relation de Chasles géométrique

**2.5 Proposition.** *Soient  $[\widehat{aob}]$  un secteur saillant et  $c$  un point du plan, distinct de  $o$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *On a la relation de Chasles géométrique :  $\widehat{aob} = \widehat{aoc} + \widehat{cob}$ .*
- 2) *Le point  $c$  est dans le secteur  $[\widehat{aob}]$ .*
- 3) *Les points  $a$  et  $b$  sont de part et d'autre de  $(oc)$  et on a  $\widehat{aoc} + \widehat{cob} \leq \pi$ .*

*Démonstration.* Cela résulte essentiellement des lemmes vus sur les secteurs et de l'additivité des longueurs d'arc.

# 3 Le théorème de l'angle inscrit : variante géométrique

## 3.1 Le théorème direct

**3.1 Théorème. (Angle inscrit et angle au centre)** *Soit  $\Gamma$  un cercle de*

centre  $o$  et soient  $a, b, c$  trois points distincts de  $\Gamma$ . On suppose  $a$  et  $o$  du même côté de  $(bc)$ . Alors on a  $\widehat{boc} = 2\widehat{bac}$ .

*Démonstration.* Il y a trois cas de figure selon la position de  $a$  par rapport aux droites  $(ob)$  et  $(oc)$ .

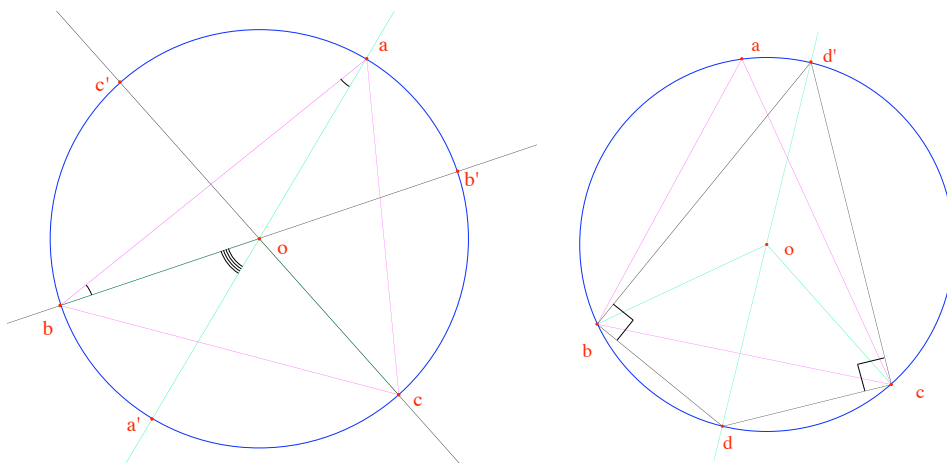


FIGURE 1 – Angles inscrit et au centre      FIGURE 2 – Angle inscrit 2

1) On suppose  $a$  dans le secteur  $[b'oc']$  opposé à  $[boc]$ , ou encore  $o$  intérieur<sup>2</sup> au triangle  $abc$ .

On appelle  $a'$  le point diamétralement opposé à  $a$ . On a  $\widehat{boc} = \widehat{boa'} + \widehat{a'oc}$  (car  $a'$  est dans le secteur  $[boc]$ , c'est Chasles géométrique) et  $\widehat{bac} = \widehat{baa'} + \widehat{a'ac}$ . Il suffit alors de montrer  $\widehat{boa'} = 2\widehat{baa'}$  (l'autre est identique en utilisant le triangle isocèle  $aoc$ ). Pour cela on considère le triangle isocèle  $aob$ . Ses angles à la base sont égaux et leur somme est le supplémentaire de l'angle en  $aob$ , donc égale à  $\widehat{boa'}$ .

2) On suppose  $o$  et  $c$  de part et d'autre de  $(ab)$ . Le raisonnement est analogue, mais avec cette fois des différences :  $\widehat{boc} = \widehat{a'oc} - \widehat{a'ob}$  et de même  $\widehat{bac} = \widehat{a'ac} - \widehat{a'ab}$ . On utilise les mêmes triangles isocèles  $aob$  et  $aoc$ .

3) L'autre cas de figure,  $o$  et  $b$  de part et d'autre de  $(ac)$ , est analogue.

**3.2 Corollaire. (Angle inscrit 1)** Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $o$  et soient  $a, d, b, c$  des points distincts de  $\Gamma$ . On suppose  $a, d$  et  $o$  du même côté de  $(bc)$ . Alors on a  $\widehat{bdc} = \widehat{bac}$ .

2. C'est un petit lemme de position : si  $c'$  et  $a$  sont du même côté de  $(ob)$ ,  $c$  et  $o$  sont du même côté de  $(ab)$ . En effet, sinon  $[oc]$  coupe  $(ab)$ , et même  $[ab]$  par convexité du disque. Mais, par rapport à  $(ob)$ ,  $[ab]$  et  $[oc]$  sont dans des demi-plans opposés.

*Démonstration.* On a  $2\widehat{bdc} = 2\widehat{bac}$  et comme ce sont des réels on a la conclusion.

On a une variante obtenue en faisant tendre le point  $d$  vers le point  $b$  :

**3.3 Corollaire. (Angle inscrit limite)** Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $o$  et soient  $a, b, c$  des points distincts de  $\Gamma$ . On suppose  $a$  et  $o$  du même côté de  $(bc)$ . Soit  $t$  un point de la tangente à  $\Gamma$  en  $b$ , du côté de  $c$  par rapport à  $(ob)$ . Alors on a  $\widehat{tbc} = \widehat{bac}$ .

*Démonstration.* Il suffit de considérer l'angle  $\widehat{cbo}$ , complémentaire de l'angle  $\widehat{tbc}$  et de passer par l'angle au centre.

**3.4 Corollaire. (Angle inscrit 2)** Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $o$  et soient  $a, b, c, d$  quatre points distincts de  $\Gamma$ . On suppose  $a$  et  $d$  de part et d'autre de  $(bc)$ . On a  $\widehat{dbc} = \pi - \widehat{bac}$ .

*Démonstration.* Supposons par exemple  $a$  du côté de  $o$  et soit  $d'$  le point diamétralement opposé à  $d$ . Alors  $d'$  est aussi du côté<sup>3</sup> de  $o$ . On a donc  $\widehat{bac} = \widehat{bd'c}$ . Par ailleurs, les triangles  $d'bd$  et  $d'cd$  sont rectangles (on les décompose en deux triangles isocèles et on utilise la somme des angles) et donc leurs angles en  $d$  et  $d'$  sont complémentaires. Comme on a  $\widehat{bdc} = \widehat{bdd'} + \widehat{d'dc}$  et  $\widehat{bd'c} = \widehat{bd'd} + \widehat{dd'c}$  (par exemple, parce que le quadrilatère  $dbd'c$  est convexe puisque ses diagonales se coupent) on en déduit le résultat.

## 3.2 La réciproque

**3.5 Théorème.** Soient  $a, b, c, d$  quatre points distincts. On suppose  $a, d$  (strictement) du même côté de  $(bc)$  (resp. de part et d'autre) et  $\widehat{bac} = \widehat{bdc}$  (resp.  $\widehat{bdc} = \pi - \widehat{bac}$ ). Alors  $a, b, c, d$  sont cocycliques.

*Démonstration.* Traitons le premier cas. Soit  $\Gamma$  le cercle circonscrit à  $a, b, c$ . On raisonne par l'absurde en supposant que  $d$  n'est pas sur  $\Gamma$ , disons à l'extérieur. Les droites  $(bd)$  et  $(cd)$  coupent<sup>4</sup> respectivement  $\Gamma$  en  $m$  et  $n$ . Comme  $m$  est sur  $\Gamma$ , du même côté que  $a$  par rapport à  $(bc)$ , on a  $\widehat{bac} = \widehat{bmc}$ . Mais, la somme des angles dans le triangle  $mdc$  donne  $\widehat{bmc} = \widehat{mdc} + \widehat{mcd} = \widehat{bdc} + \widehat{mcd}$ . Comme on a  $\widehat{bac} = \widehat{bdc}$  par hypothèse, on en déduit  $\widehat{mcd} = 0$ . Le point  $m$  est donc à la fois sur  $(bd)$  et  $(cd)$ , donc en  $d$  et  $d$  est sur le cercle, ce qui est absurde.

3. Attention, en revanche on ne peut pas dire que  $a'$  est de l'autre côté de  $a$ . Ici ça marche parce que  $[od]$  coupe  $(bc)$  en  $m$ . Alors la demi-droite  $[mo)$  est toute entière du côté de  $o$  et contient  $d'$ .

4. Le lecteur qui décèlerait ici une imprécision pourrait la lever en utilisant le théorème de l'angle inscrit limite.

## 4 Angles orientés

Dans le polycopié de géométrie euclidienne [DHP], les angles orientés sont définis à partir des rotations et de l'exponentielle, voir ci-dessous. Vu la prochaine disparition des rotations dans les programmes du second degré, il me semble préférable d'en avoir aussi une définition directe. C'est ce que je tente ici.

### 4.1 Orientation du plan

#### 4.1.1 Variante élémentaire

Voici une manière de définir une orientation du plan. Je ne donne pas les détails, ils seront peut-être dans [Axiomes]. La seule idée que je veux faire passer c'est qu'on peut le faire.

On appelle **repère** la donnée d'un point  $o$  et de deux demi-droites perpendiculaires  $\alpha, \beta$  d'origine  $o$ . On en choisit un qui nous sert d'emblème et on le décrète direct.

Il s'agit de dire quand les autres le sont. On commence par les repères d'origine  $o$ . Pour compléter  $o, \alpha^-$  (où  $\alpha^-$  est la demi-droite opposée à  $\alpha$ ) en un repère direct on prend  $\beta^-$ . Si  $\gamma$  est dans le demi-plan  $E^+$  limité par  $\alpha$  et qui contient  $\beta$ , on choisit la demi-droite perpendiculaire qui est du même côté que  $\alpha^-$  par rapport à  $\gamma$ . Si  $\gamma$  est dans  $E^-$  c'est le contraire.

On en déduit une orientation en chaque point  $a$  de la manière suivante. On complète  $o, [oa]$  par une demi-droite  $\gamma$  en un repère direct. On obtient un repère direct en  $a$  en prenant  $a$ , la demi-droite issue de  $a$  et contenue dans  $[oa]$  et la demi-droite perpendiculaire à  $(oa)$  en  $a$  située dans le même demi-plan que  $\gamma$ . Une fois qu'on a un repère direct en  $a$ , on définit les autres comme on l'a fait en  $o$  (il suffit de penser aux aiguilles d'une montre ou au sens trigonométrique pour s'y retrouver, le lecteur pointilleux écrira les détails).

#### 4.1.2 Variante réflexions

On définit encore, à partir de deux demi-droites perpendiculaires, de tels objets positifs et négatifs selon le nombre de réflexions nécessaires pour passer de l'un à l'autre. Là encore, il y a des choses à montrer, voir le papier [R] sur ma page web.



## 4.2 Angles orientés

Maintenant qu'on a une notion d'orientation, on peut parler d'isométries positives (ou déplacements) ou négatives : les isométries positives sont celles qui conservent l'orientation, les négatives celles qui la renversent. Vu la définition, il est clair que les symétries axiales sont négatives. Cela implique que les déplacements sont simplement transitifs sur les demi-drapeaux (un point et une demi-droite). En effet, on peut toujours envoyer  $(a, \delta)$  sur  $(a', \delta')$  par une isométrie et, si elle n'a pas le bon signe, on corrige avec la symétrie d'axe  $\delta'$ .

### 4.2.1 La définition élémentaire

Soit  $[\widehat{a\omega b}]$  un secteur d'angle géométrique  $\theta = \widehat{a\omega b}$ . On définit l'angle orienté  $(\vec{\omega a}, \vec{\omega b})$  (qui vaut  $\theta$  ou  $-\theta$ ) comme suit. On complète  $\omega, \alpha = [\omega a]$  en un repère direct  $\omega, \alpha, \beta$ . Si  $b$  est dans le demi-plan positif (celui de  $\beta$ ), on prend  $\theta$ , s'il est dans le demi-plan négatif on prend  $-\theta$ . S'il est sur la demi-droite  $\alpha^-$  on est comme l'âne de Buridan, on ne sait pas choisir entre  $\pi$  et  $-\pi$ . On décrète donc que ces angles orientés sont égaux :  $\pi = -\pi$  ou encore  $2\pi = 0$ . Les angles orientés habitent donc dans  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ . La définition ci-dessus permet de définir l'angle  $(\vec{v}, \vec{w})$  pour deux vecteurs non nuls.

### 4.2.2 Par l'algèbre linéaire

On renvoie à [DHP] pour ce point de vue. Les éléments du groupe des rotations vectorielles s'écrivent matriciellement sous la forme  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  avec  $a^2 + b^2 = 1$ , on écrit  $a = \cos \theta$ ,  $b = \sin \theta$  avec  $\theta \in \mathbf{R}$  et ce nombre est défini modulo  $2\pi$  vu la période des fonctions sinus et cosinus.

Pour résumer sur les angles de demi-droites : les angles géométriques sont définis par leur cosinus, les angles orientés ont, en plus, un signe, défini par leur sinus.

## 4.3 Propriétés

### 4.1 Proposition.

1) Les déplacements (resp. les isométries négatives) conservent les angles orientés (resp. les changent en leur opposé).

2) On a la relation de Chasles :  $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$ .

3) On a la règle du parallélogramme :  $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \iff (\vec{u}, \vec{u}') = (\vec{v}, \vec{v}')$ .

4) On a les formules :  $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$ ,  $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$  et  $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ .

*Démonstration.* Expliquons la relation de Chasles dans un des cas non évidents : celui de trois angles obtus tournant dans le sens trigonométrique :  $o, a, b, c$ . Il s'agit de montrer  $(\vec{oa}, \vec{ob}) + (\vec{ob}, \vec{oc}) = (\vec{oa}, \vec{oc})$ . On introduit le point  $a'$  opposé à  $a$  et on a, par la relation de Chasles géométrique,  $(\vec{oa}, \vec{ob}) + (\vec{ob}, \vec{oa'}) = \pi$ ,  $(\vec{ob}, \vec{oc}) = (\vec{ob}, \vec{oa'}) + (\vec{oa'}, \vec{oc})$  et  $(\vec{oa'}, \vec{oc}) + (\vec{oc}, \vec{oa}) = \pi$ , d'où  $(\vec{oa'}, \vec{oc}) = \pi - (\vec{oa}, \vec{oc})$ . On en déduit  $(\vec{oa}, \vec{ob}) + (\vec{ob}, \vec{oc}) = 2\pi + (\vec{oa}, \vec{oc})$  et le résultat.

**4.2 Proposition.** 1) Soient  $a, b, c$  trois points distincts. On a  $(\vec{ab}, \vec{ac}) + (\vec{bc}, \vec{ba}) + (\vec{ca}, \vec{cb}) = \pi$ .

2) Si le triangle  $abc$  est isocèle en  $a$  on a  $(\vec{ba}, \vec{bc}) = -(\vec{ca}, \vec{cb})$ .

*Démonstration.* Pour 1) il suffit d'écrire  $(\vec{ca}, \vec{cb}) = (\vec{ac}, \vec{bc})$  et d'appliquer Chasles, pour 2) d'utiliser la symétrie par rapport à la hauteur-médiane issue de  $a$ .

## 4.4 Angles orientés de droites

Considérons deux droites  $A, B$  sécantes en  $o$ , chacune munie d'un vecteur directeur, par exemple unitaire,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . Le problème pour définir l'angle des droites  $A, B$  (dans cet ordre) c'est qu'il n'y a pas un mais deux vecteurs unitaires les définissant :  $\vec{i}$  et  $-\vec{i}$ . Il y a donc *a priori* quatre angles possibles :  $(\vec{i}, \vec{j}), (-\vec{i}, \vec{j}), (\vec{i}, -\vec{j}), (-\vec{i}, -\vec{j})$ . Comme on a  $(\vec{i}, \vec{j}) = (-\vec{i}, -\vec{j})$  et  $(-\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, -\vec{j})$ , ces angles se réduisent à deux  $(\vec{i}, \vec{j})$  et  $(-\vec{i}, \vec{j}) = (-\vec{i}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{j}) = \pi + (\vec{i}, \vec{j})$ .

Pour définir un seul angle pour les droites, il faut identifier ces deux angles, autrement dit travailler non plus modulo  $2\pi$ , mais modulo  $\pi$ . Cela conduit à la définition :

**4.3 Définition.** Soient  $A, B$  deux droites sécantes en  $o$ , munies des vecteurs directeurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . L'angle orienté des droites  $A, B$ , noté  $(A, B)$ , est la classe modulo  $\pi$  de l'angle  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Il ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs. Si les droites sont respectivement  $(ab)$  et  $(cd)$  on notera, par abus,  $(ab, cd)$  au lieu de  $((ab), (cd))$ .

La proposition suivante découle de celle concernant les angles de vecteurs :

### 4.4 Proposition.

1) Les déplacements (resp. les isométries négatives) conservent les angles orientés de droites (resp. les changent en leur opposé).

2) On a la relation de Chasles :  $(A, B) = (A, C) + (C, B)$ .

3) On a la règle du parallélogramme :  $(A, B) = (A', B') \iff (A, A') = (B, B')$ .

4) On a les formules :  $(A, A) = 0, (A, B) = -(B, A)$ .

**4.5 Corollaire.** *Au sens des angles orientés de droites, la somme des angles d'un triangle (comptés dans le même sens) est nulle. Précisément, si le triangle est  $abc$  on a  $(ab, ac) + (bc, ba) + (ca, cb) = 0$ .*

*Démonstration.* Si on pose  $A = (bc)$ ,  $B = (ca)$  et  $C = (ab)$ , la relation n'est autre que  $(C, B) + (A, C) + (B, A) = 0$  et elle résulte de la relation de Chasles.

## 5 Le théorème de l'angle inscrit avec les angles orientés

### 5.1 Angle inscrit et angle au centre

**5.1 Théorème.** *Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $o$  et soient  $a, b, c$  trois points distincts de  $\Gamma$ . Alors on a  $(\vec{ob}, \vec{oc}) = 2(\vec{ab}, \vec{ac})$  (dans  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ ).*

*Démonstration.* Elle est presque identique à la précédente, mais il n'y a plus besoin de distinguer les cas de figure. On introduit encore le point  $a'$  diamétralement opposé à  $a$ . On écrit, par Chasles,  $(\vec{ob}, \vec{oc}) = (\vec{ob}, \vec{oa'}) + (\vec{oa'}, \vec{oc})$  et  $(\vec{ab}, \vec{ac}) = (\vec{ab}, \vec{aa'}) + (\vec{aa'}, \vec{ac})$  et on montre le résultat avec  $a'$  au lieu de  $c$  (resp.  $b$ ). La propriété du triangle isocèle  $aob$  donne  $(\vec{ab}, \vec{aa'}) = (\vec{ab}, \vec{ao}) = -(\vec{ba}, \vec{bo}) = (\vec{bo}, \vec{ba})$ . On écrit la somme des angles de  $aob$  :  $(\vec{ab}, \vec{ao}) + (\vec{bo}, \vec{ba}) + (\vec{oa}, \vec{ob}) = \pi$ , soit  $2(\vec{ab}, \vec{ao}) = \pi - (\vec{oa}, \vec{ob}) = (\vec{ob}, \vec{oa'})$ .

Attention, le corollaire suivant est une égalité d'angles modulo  $\pi$ .

**5.2 Corollaire.** *Soit  $\Gamma$  un cercle et soient  $a, b, c, d$  quatre points distincts de  $\Gamma$ . Alors on a  $(\vec{ab}, \vec{ac}) = (\vec{db}, \vec{dc})$  modulo  $\pi$ .*

*Démonstration.* On a  $(\vec{ob}, \vec{oc}) = 2(\vec{ab}, \vec{ac}) = 2(\vec{db}, \vec{dc})$  modulo  $2\pi$  soit  $\theta = 2\alpha + 2k\pi = 2\beta + 2l\pi$ , d'où  $\alpha = \beta + (l - k)\pi$ .

### 5.2 Angles orientés de droites

Avec les angles de droites on a le résultat le plus efficace :

**5.3 Théorème.** *Soient  $a, b, c, d$  quatre points distincts du plan. Les points  $a, b, c, d$  sont cocycliques ou alignés si et seulement on a l'égalité  $(ab, ac) = (db, dc)$  dans  $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ .*

*Démonstration.* Le sens direct est évident dans le cas de l'alignement et a été vu en 5.2 pour le cas cocyclique. Pour la réciproque on raisonne comme en 3.5, mais avec les angles de droites.

## 6 Un exemple : le lemme du pivot

**6.1 Théorème.** Soient  $a, b, c$  trois points de  $E$ , non alignés, et  $p, q, r$  des points situés respectivement sur  $(bc)$ ,  $(ca)$ ,  $(ab)$  et distincts de  $a, b, c$ . Alors les cercles circonscrits aux triangles  $aqr$ ,  $brp$  et  $cpq$  ont un point commun.

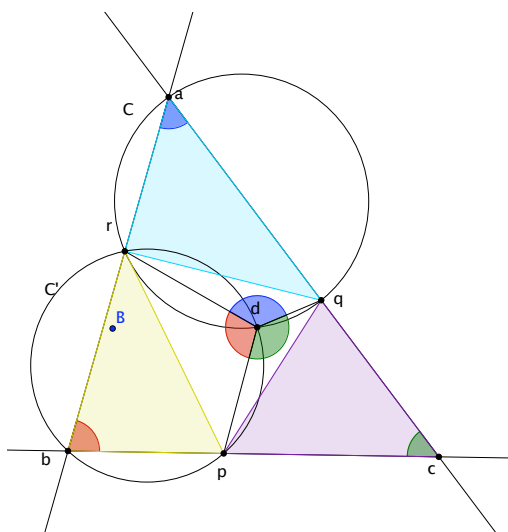


FIGURE 3 – Premier cas de figure

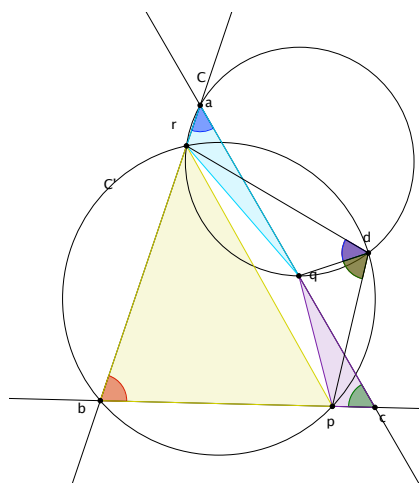


FIGURE 4 – Second cas de figure

### 6.1 Preuve avec les angles géométriques

Soient  $C, C'$  les cercles circonscrits aux triangles  $aqr$  et  $brp$  et soit  $d$  le point d'intersection de  $C, C'$  autre que  $r$ . En utilisant la figure 3 ci-dessous, on voit qu'il suffit de montrer qu'on a  $\widehat{pdq} = \pi - \widehat{pcq}$  et on constate les égalités d'angles :  $\widehat{qdr} = \pi - \widehat{qar}$ ,  $\widehat{rdp} = \pi - \widehat{rbp}$ . On a aussi, en faisant la somme des angles en  $d$  :  $\widehat{qdr} + \widehat{rdp} + \widehat{pdq} = 2\pi$ , d'où  $\widehat{pdq} = \widehat{qar} + \widehat{rdp}$ . La conclusion vient du fait que la somme des angles du triangle  $abc$  est égale à  $\pi$ .

#### 6.1.1 Discussion

Il y a plusieurs imprécisions dans cette preuve. D'abord, il se pourrait que les cercles  $(aqr)$  et  $(brp)$  soient tangents en  $r$ . Ensuite et surtout, cette preuve est tributaire de la position des points. On a, par exemple, un autre cas de figure avec la figure 4. Dans cette position, le raisonnement est le suivant :

on a  $\widehat{qdr} = \widehat{qar}$  et  $\widehat{rdp} = \pi - \widehat{rbp}$ . En  $d$  on a  $\widehat{rdp} = \widehat{qar} + \widehat{pdq}$  et on en déduit  $\widehat{pdq} = \pi - \widehat{qar} - \widehat{rbp} = \widehat{pcq}$ .

Bien entendu, il faudrait préciser ces cas de figure et les égalités ci-dessus.

### 6.1.2 Discussion didactique

D'un point de vue didactique, il y a plusieurs choses importantes à dire.

Dans une vraie classe, si on laisse les élèves faire les figures eux-mêmes, il va nécessairement surgir des cas de figure différents. Il faut donc y avoir réfléchi et avoir les armes pour y faire face. Bien entendu, une solution, trop souvent utilisée, y compris dans les manuels, consiste à donner la figure pour éviter la difficulté. C'est possible pour un premier contact, mais je désapprouve formellement qu'on fasse ça tout le temps : il faut aussi apprendre aux élèves à réfléchir hors de cadres totalement figés et à faire preuve d'initiative. De toutes façons, il se trouvera bien toujours un élève frondeur qui ne respectera pas la consigne !

Il n'est pas question, avec de jeunes élèves, de regarder tous les cas de figure (et surtout de montrer qu'il n'y en a pas d'autres que ceux qu'on a répertorié). Il n'est pas non plus question de prouver les assertions de position, que l'on se contentera de lire sur la figure. Mon objectif en traitant explicitement ce type de question est de rassurer les futurs professeurs (donc aussi leurs élèves) en disant : on peut le faire.

Pour les élèves que les mathématiques intéressent, et qui en auraient marre des cas de figure, on peut leur dire qu'il existe une façon de faire tout cela d'un seul coup avec les angles orientés, ce que nous regardons maintenant.

## 6.2 La preuve avec les angles orientés

Elle est copiée sur la précédente et je conseille vivement de se servir de la figure pour la trouver, mais on peut aussi la faire de manière **sémiotique**, c'est-à-dire uniquement en suivant les signes (les formules). Pour cela, il est essentiel d'avoir bien fait attention à l'appellation des points, de manière à ce qu'elle soit compatible avec les permutations circulaires de  $a, b, c$ .

On part, comme ci-dessus, du point  $d$  intersection des cercles  $(aqr)$  et  $(brp)$  et on doit montrer qu'il est sur  $(cpq)$ . On raisonne en termes d'angles de droites. Les hypothèses de cocyclicité de  $a, d, q, r$  et  $b, d, r, p$  donnent :  $(dq, dr) = (aq, ar)$  et  $(dr, dp) = (br, bp)$  et on veut prouver la cocyclicité de  $c, d, p, q$  donc  $(dq, dp) = (cq, cp)$ . Mais on a, en appliquant deux fois la relation de Chasles,  $(dq, dp) = (dq, dr) + (dr, dp) = (aq, ar) + (br, bp) = (ac, ab) + (ba, bc) = (ca, cb) = (cq, cp)$ .

On notera la grande souplesse produite par l'usage des angles de droites : on a pu remplacer ici  $(aq)$  par  $(ac)$  (c'est la même droite), ou  $(ac)$  par  $(ca)$  (idem).

## 7 Références

[Axiomes] PERRIN Daniel, *Une axiomatique pour la géométrie du collège* (2050).

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin (1995).

[DHP] DAVID Marie-Claude, HAGLUND Frédéric, PERRIN Daniel, *Polycopiés de géométrie affine et euclidienne*.

[Euclide] EUCLIDE, *Les éléments*, trad. Kayas, Éditions du CNRS (1978).

[GA] PERRIN Daniel, *Le plus grand angle fait face au plus grand côté*, <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/>

[Hilbert] HILBERT David, *Les fondements de la géométrie*, Dunod (1971).

[Lion] LION Georges, *Géométrie du plan*, Vuibert (2001).

[R] PERRIN Daniel, *Isométries du plan et de l'espace*, <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/>

[S] PERRIN Daniel, *Longueur d'arc, aire de secteur, fonctions trigonométriques, limite de  $\sin x/x$  en 0*, <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/>