

Problèmes de lieux géométriques

Daniel PERRIN

1 Introduction

Ce texte vise à donner des éléments théoriques pour traiter l'exposé 37 du CAPES 2013.

Les problèmes de lieux géométriques étaient le pain quotidien des collégiens et des lycéens d'autrefois. Ils ont totalement disparu des actuels programmes : le mot lieu n'est plus prononcé nulle part. C'est d'autant plus stupide que nous avons maintenant des outils extraordinaires pour aborder ces questions avec les logiciels¹ de géométrie dynamique qui répondent aussitôt à la question du lieu d'un point, au moins dans la variante "image", voir ci-dessous.

Dans ce qui suit j'utilise un texte de Bernard Destainville (de l'IREM de Toulouse) dont je trouve les exemples très intéressants. On le trouve sur Internet : www.univ-irem.fr/commissions/geometrie/P5.pdf.

1.1 Introduction : l'idée de dimension

Un lieu géométrique, c'est simplement l'ensemble des points, disons du plan affine euclidien \mathcal{P} pour se limiter au cas le plus courant, satisfaisant une certaine propriété géométrique. De plus, même si ce n'est pas dit officiellement, on a envie, le plus souvent², qu'un lieu dans le plan soit une courbe, donc quelque chose de dimension 1. Si l'on analyse les exemples, il y a deux manières différentes d'obtenir de tels lieux :

1) On considère une application f de \mathcal{P} , qui est de dimension 2, dans quelque chose de dimension 1, par exemple \mathbf{R} . Alors, dans les bons cas³, les fibres, c'est-à-dire les ensembles $f^{-1}(k)$ seront de dimension 1.

2) On considère une application F de quelque chose de dimension 1, par exemple \mathbf{R} ou une courbe de \mathcal{P} , à valeurs dans \mathcal{P} . Alors là encore, son image a tendance⁴ à être de dimension 1.

Nous étudions maintenant ces deux types de lieux.

1. J'utilise souvent *Cabri* parce que j'en ai plus l'habitude, mais tout peut se faire avec *Geogebra*.

2. Voir cependant 5.6.

3. Il vaut mieux que f soit surjective.

4. Il vaut mieux cette fois que F soit injective.

1.2 Les lieux images réciproques ou lignes de niveau

1.2.1 Définition

On considère une application $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{R}$, sans doute avec de bonnes propriétés de régularité, sans doute aussi définie géométriquement, mais peu importe, et un réel k . La ligne de niveau k de f c'est simplement :

$$L_k(f) = f^{-1}(k) = \{M \in \mathcal{P} \mid f(M) = k\}.$$

1.2.2 Exemples

Les exemples abondent car il suffit de prendre pour f une fonction calculée à partir des invariants usuels de la géométrie : longueurs, angles, aires.

- On se donne $O \in \mathcal{P}$ et on prend $f(M) = OM$, les lignes de niveau sont les cercles de centre O .

- On se donne deux points A, B et on prend $f(M) = \frac{MA}{MB}$. Les lignes de niveau sont des cercles ou la médiatrice de $[AB]$, voir 1.1.

- On se donne A, B et on prend $f(M) = \widehat{AMB}$. On trouve l'arc capable et son symétrique. Il y a des variantes avec des angles orientés de droites ou de vecteurs.

- On se donne un triangle ABC et on cherche les points M tels que $\mathcal{A}(MBC) = \mathcal{A}(ABC)$, voir aussi 5.1.

- On se donne A, B et on prend $f(M) = MA + MB$ (resp. $|MA - MB|$). On trouve les ellipses (resp. les hyperboles) de foyers A, B .

1.1 Exercice. Soient A, B deux points distincts et k un réel positif différent de 1.

1) Montrer qu'il existe deux points $I, J \in (AB)$ vérifiant $\overrightarrow{IA} = k \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{JA} = -k \overrightarrow{JB}$.

2) Soit M un point quelconque du plan. Montrer les formules $(1-k) \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB}$ et $(1+k) \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MA} + k \overrightarrow{MB}$.

3) Montrer qu'on a $(\overrightarrow{MI} | \overrightarrow{MJ}) = 0$ si et seulement si $MA = kMB$. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $MA/MB = k$.

4) Traiter le cas $k = 1$.

1.2 Exercice. Soient A, B deux points fixes distincts et k un réel > 0 . Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$ ou $|MA^2 - MB^2| = k$.

Plus généralement, on peut considérer la fonction scalaire de Leibniz définie par $f(M) = \sum_{j=1}^n a_j (MA_j)^2$ où les a_j sont des nombres réels et les A_j des points du plan. L'étude de cette fonction et de ses lignes de niveau était très à la mode dans l'enseignement secondaire dans les années 1980-90. Elle a totalement disparu⁵.

1.3 Les lieux images

1.3.1 Définition

On considère cette fois une application $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ (peut-être définie seulement sur un ouvert de \mathcal{P} , et sans doute encore régulière et géométrique) et un lieu Γ (il s'agit en général d'une courbe, il y a autant de problèmes que de Γ différents). Autrement dit, on se donne un ensemble Γ et un procédé pour passer d'un point P du plan à un autre point Q et on cherche le lieu des points $Q = F(P)$ lorsque P décrit Γ , autrement dit l'image $F(\Gamma)$.

L'exemple type consiste à prendre pour F une transformation géométrique classique, le résultat étant évident pour les isométries et les similitudes, mais déjà moins pour l'inversion avec les cercles et les droites. À côté de cela, il y a foule d'exemples plus complexes, qui peuvent être définis de manière géométrique simple, mais avec parfois une expression analytique assez compliquée. Ces exemples, lorsque F est définie géométriquement, ont tous un point commun qui est de se prêter à l'usage des logiciels de géométrie. Il suffit en effet de désigner Q puis P et le lieu apparaît aussitôt.

1.3.2 Exemples

Il y a une grande quantité d'exemples avec des applications F plus ou moins naturelles, presque tous les exemples donnés ci-dessous sont de ce type. On notera que F peut notamment être une transformation géométrique usuelle (isométrie, similitude, inversion), avec un très gros bémol : il n'y en a presque plus dans les nouveaux programmes !

Voici deux exemples :

1.3 Exercice. *On considère deux points fixes B, C distincts. Le point A varie sur une certaine courbe Γ . Quel est le lieu du centre de gravité G de ABC ?*

5. On peut difficilement faire cette étude actuellement dans le cas général car elle utilise les barycentres. En revanche, l'exercice 1.2 se traite sans difficulté, analytiquement ou avec le produit scalaire, voire Al-Kashi, en introduisant le milieu de A, B .

La réponse est évidente car on passe de A à G par l'homothétie h de centre A' milieu de $[BC]$ et de rapport $1/3$. Malheureusement, l'homothétie n'est plus au programme ! Dans ce cas, on peut s'en sortir analytiquement car l'homothétie s'écrit $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$ et on en déduit aisément les coordonnées de G en fonction de celles de A .

1.4 Exercice. On considère un point fixe A . Le point M varie sur une certaine courbe Γ . On construit un triangle équilatéral direct AMP . Quel est le lieu de P ?

Cette fois, on passe de M à P par la rotation ρ de centre A et d'angle $\pi/3$, qui n'est plus au programme. Ici l'approche analytique n'est pas évidente car on ne connaît pas non plus la matrice de la rotation. On peut éventuellement utiliser les complexes.

1.4 L'approche analytique

On choisit un repère orthonormé avec des coordonnées x, y . Dans le cas d'un lieu image réciproque, si l'on a l'expression de f , on obtient aussitôt une équation cartésienne du lieu $f(x, y) = k$. Il faut parfois travailler un peu pour en avoir une forme agréable. Déjà, pour le cercle de centre O et de rayon R il faut écrire $OM^2 = R^2$ plutôt que $OM = R$. C'est encore plus vrai dans le cas de l'ellipse. On notera que les logiciels ne sont pas très à l'aise avec les équations implicites. *Geogebra* ne sait construire que les courbes $y = f(x)$ ou les courbes paramétrées, ce qui est loin de couvrir l'ensemble des courbes $f(x, y) = 0$, même algébriques. De son côté *xcas* a une commande *courbe en implicite*, mais avec un résultat très médiocre, même pour $x^4 + y^4 = 1$. On est donc réduit à résoudre $f(x, y)$ en x ou en y ou à la paramétrer, lorsque c'est possible.

Pour les lieux images il y a deux façons de faire. On a une application $(X, Y) = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$. Si le lieu Γ est donné paramétriquement par $x = f(t)$ et $y = g(t)$ on a aussitôt $F(\Gamma)$ par $X = F_1(f(t), g(t))$ et de même pour Y . S'il est donné par une équation cartésienne $G(x, y) = 0$, il faut détenir (peut-être localement) une fonction inverse de F et $F(\Gamma)$ est alors défini par $G(F^{-1}(X, Y)) = 0$.

2 Le premier problème de Destainville

Le problème ci-dessous est un excellent exemple de recherche de lieux du type "image".

2.1 L'énoncé général

Soient A, B deux points distincts de \mathcal{P} . On associe à un point $P \notin (AB)$ du plan le point $Q = F(P)$ défini comme l'intersection des perpendiculaires à (PA) en A et à (PB) en B . On suppose que P décrit une certaine courbe Γ et on demande quel est alors le lieu de Q .

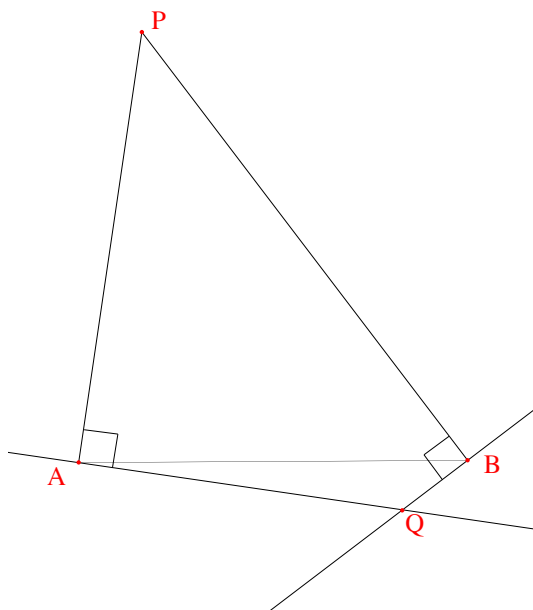


FIGURE 1 – La transformation F

2.1 Remarque. Si P est sur (AB) le point Q n'est pas défini, soit que les droites (PA) ou (PB) n'existent pas (si $P = A$ ou B) soit qu'elles soient confondues et donc que les perpendiculaires à ces droites en A, B soient parallèles (Q est alors à l'infini dans la direction perpendiculaire à (AB)).

2.2 Calcul de l'application F

On choisit un repère orthonormé dans lequel on a $A = (-a, 0)$ et $B = (a, 0)$. On pose $P = (x, y)$ et $Q = (X, Y)$. On écrit que les produits scalaires $(\overrightarrow{AP} | \overrightarrow{AQ})$ et $(\overrightarrow{BP} | \overrightarrow{BQ})$ sont nuls. On trouve :

$$X = -x \quad \text{et} \quad Y = \frac{x^2 - a^2}{y}.$$

On retrouve le fait que F n'est pas définie pour $y = 0$, c'est-à-dire sur (AB) . On voit aussi, et c'est clair géométriquement, que F est une involution (on a donc $F = F^{-1}$) qui réalise une bijection de $\mathcal{P} - (AB)$ sur lui-même. On voit enfin, et c'est très révélateur, qu'une application très simple sur le plan géométrique ne l'est pas sur le plan algébrique⁶.

2.3 Lieu image : le cas où Γ est une droite

Si cette droite a pour équation $ux + vy + w = 0$ on voit que l'image est sur la courbe d'équation $-uXY + v(X^2 - a^2) + wY = 0$ qui est en général une hyperbole (que *Cabri* refuse parfois de tracer).

Dans le cas $v = 0$, disons $x = w$, le lieu est la droite $X = -w$ (on trouve aussi la droite $Y = 0$ parasite). Dans le cas $u = 0$, disons $y = w$, on trouve une parabole.

2.4 Lieu image : le cas où Γ est un cercle

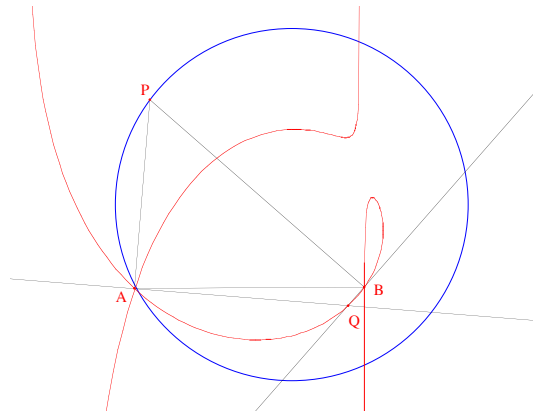


FIGURE 2 – L'image d'un cercle (en rouge)

Cabri montre bien qu'on obtient une courbe de grand degré. Le calcul est facile, si on part de $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$, on trouve la quartique d'équation :

$$X^4 + X^2Y^2 + 2\alpha XY^2 - 2\beta X^2Y - 2a^2X^2 + \gamma Y^2 + 2\beta a^2Y + a^4 = 0.$$

6. Les experts noteront qu'on a une variante projective de $F : (x, y, t) \mapsto (-xy, x^2 - a^2t^2, yt)$.

Avec le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, on trouve la courbe décomposée d'équation $X^4 + X^2Y^2 - 2a^2X^2 - a^2Y^2 + a^4 = 0 = (X - a)(X + a)(X^2 + Y^2 - a^2)$ (deux droites et un cercle, seul le cercle est à retenir).

Avec une ellipse on obtient aussi de jolies choses (des courbes avec deux points doubles en A et B).

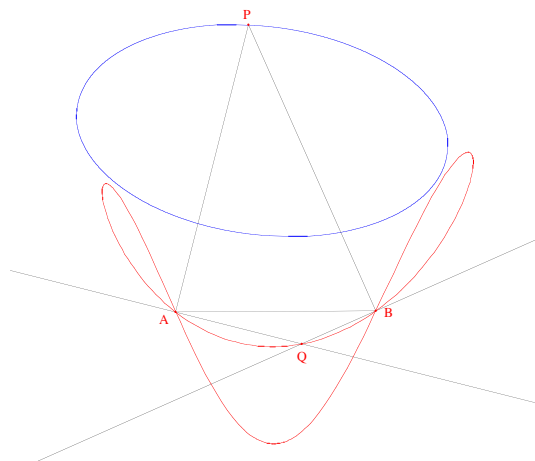


FIGURE 3 – L'image d'une ellipse (en rouge)

2.5 L'exemple initial de Destainville

C'est le cas où Γ est d'équation $x = -a/2$. Le calcul montre que Q décrit la droite $X = a/2$ privée du point $(a/2, 0)$. On demande aussi le lieu du point I , milieu de $[PQ]$.

La preuve géométrique est facile. On considère le milieu I de $[PQ]$. Les points A, B, P, Q sont sur le cercle de diamètre $[PQ]$, de centre I et on a donc $IA = IB$, de sorte que I est sur la médiatrice de $[AB]$. Si l'on note O le milieu de $[AB]$, on voit, par projection sur (AB) , que Q est sur la médiatrice de $[OB]$.

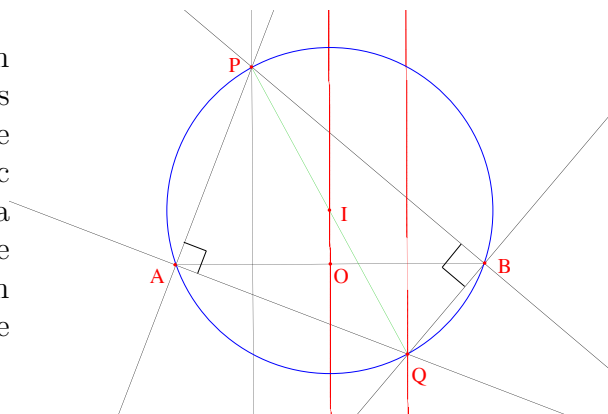


FIGURE 4 – Le problème initial

2.5.1 Le lieu de I par le calcul

Le point I se calcule facilement dans le cas général, si $P = (x, y)$ on a $I = \left(0, \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2y}\right)$. Le point I est toujours sur l'axe des y (i.e. la médiatrice de $[AB]$). Dans le cas $x = a/2$, on trouve $Y = \frac{y^2 - \frac{3a^2}{4}}{2y}$.

2.2 Remarque. Le calcul montre, en étudiant la fonction $y \mapsto y - \frac{3a^2}{8y}$, que le lieu est parcouru deux fois par I lorsque P varie sur la droite $x = -a/2$.

3 Le second problème de Destainville

C'est encore un exemple de lieu image.

3.1 L'énoncé initial

On considère un quart de cercle Γ de centre O et d'extrémités A et B . Soit M un point de Γ distinct de B , la tangente en M coupe la demi-droite $[OA)$ en N . Soit P le point de la demi-droite $[NM)$ tel que $NP = NO$. Quel est le lieu géométrique de P lorsque M décrit Γ ?

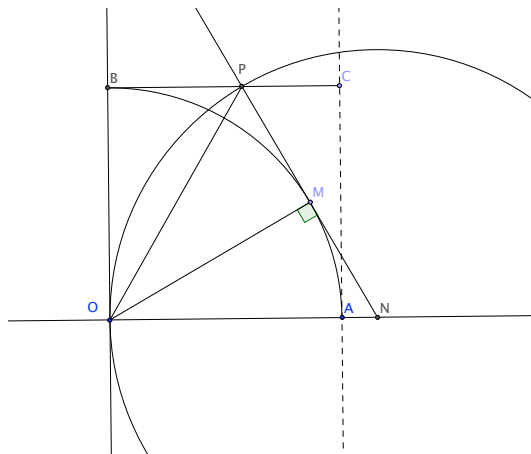


FIGURE 5 – Le second problème

L'expérience *Geogebra* montre clairement que le lieu est un segment $]BC[$ de la parallèle Δ à (OA) passant par B , avec C sur la perpendiculaire à (OA) en A . La preuve géométrique du fait que P est sur Δ est facile. Comme ONP

est isocèle en N on a $\widehat{OPN} = \widehat{PON}$ et leurs complémentaires \widehat{POM} et \widehat{POB} sont égaux eux aussi. Autrement dit, (OP) est bissectrice de \widehat{BOM} . Dans la symétrie par rapport à (OP) , le cercle est invariant, donc M s'envoie sur B et P , qui est sur la tangente en M est aussi sur la tangente en B , donc sur Δ .

3.2 L'application F

On peut, au prix d'une définition légèrement différente des objets, qui revient à oublier le lieu Γ de M dans un premier temps, faire rentrer ce problème dans le cadre des lieux images. On se donne O, A, B comme ci-dessus. On part d'un point M du plan, distinct de O . La perpendiculaire à (OM) en M coupe (OA) en N (sauf si M est sur (OB)). On définit ensuite $P = F(M)$ comme ci-dessus.

Le calcul se fait facilement en prenant le repère O, A, B , $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $B = (0, a)$. Si M est le point (x, y) et $N = (z, 0)$, on trouve, en écrivant $(\overrightarrow{OM} | \overrightarrow{MN}) = 0$, $z = \frac{x^2 + y^2}{x}$. Pour trouver $P = (X, Y)$, on écrit $ON^2 = NP^2$ qui donne $X^2 - 2zX + Y^2 = 0$, puis $\overrightarrow{PN} = \lambda \overrightarrow{MN}$ qui donne $Y = \frac{x^2 + y^2 - xX}{y}$ et, avec les deux, en simplifiant par $x^2 + y^2$, on a l'équation du second degré en X :

$$xX^2 - 2(x^2 + y^2)X + x(x^2 + y^2) = 0$$

dont le discriminant est $\Delta' = y^2(x^2 + y^2)$. On obtient donc :

$$X = \frac{x^2 + y^2 + \epsilon y \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad \text{et} \quad Y = -\epsilon \sqrt{x^2 + y^2}$$

où $\epsilon = \pm 1$. Comme M et P sont sur la même demi-droite issue de N , y et Y sont de même signe et on doit donc prendre ϵ du signe de $-y$.

Dans le cas de Destainville, on a $\epsilon = -1$ et $x^2 + y^2 = a^2$, d'où $Y = a$ et P est bien sur la droite Δ . Pour savoir quel est exactement le lieu on regarde $X = \frac{a(a - y)}{x}$. En posant $x = \sin u$ et $y = \cos u$ avec $u \in]0, \pi/2]$, on a $X = a \frac{1 - \cos u}{\sin u}$ et on voit que X décrit $]0, 1]$.

3.1 Remarque. Destainville insiste beaucoup sur la réciproque. Je ne le suis pas sur ce point et je considère que c'est un travers de prof de maths. D'abord, cette réciproque ne présente pas de vraie difficulté (on fait les choses à l'envers, c'est juste em...bêtant). Ensuite, c'est facile analytiquement. Enfin, je

crains que ce genre de choses dégoûte à tout jamais des maths l'élève moyen, alors que le reste de l'exercice est intéressant. Bref, je pense que ce n'est pas aussi essentiel qu'il le dit.

3.2 Remarque. Même si l'on part d'un Γ assez simple (une droite, un cercle autre que celui donné), l'expérience montre que le lieu de P est compliqué.

4 Un lieu limité

Dans cet exemple, on a encore un lieu image, avec deux particularités : l'application n'est pas injective et on doit être soigneux sur le calcul de l'image.

4.1 L'exercice

Soient O et A deux points du plan. À un point M du plan, distinct de O , on associe le point N , projeté orthogonal de A sur (OM) . Quel est le lieu de N lorsque M décrit un ensemble Γ (par exemple un cercle de centre A) ?

Cet exemple est très intéressant car ici, la transformation du plan qui passe de M à N n'est pas du tout bijective (c'est essentiellement une projection). Cela montre que le lieu de N est une courbe, même si M décrit une partie du plan qui est de dimension 2. Soyons précis. Comme l'angle \widehat{ONA} est droit, il est clair que N est sur le cercle \mathcal{C} de diamètre $[OA]$, et ce quel que soit M . Mais, en général, le lieu ne sera pas le cercle tout entier. Par exemple, dans le cas où M décrit un cercle Γ de centre A , comme on a $AN \leq AM$, le point N est intérieur à Γ . Le lieu est donc l'intersection de \mathcal{C} et du disque limité par Γ . Si O est intérieur à Γ c'est le cercle tout entier, mais s'il est extérieur c'est seulement un arc.

4.2 Le calcul

On prend $O = (0, 0)$ et $A = (a, 0)$ avec, disons, $a > 0$. On pose $M = (x, y)$ et $N = (X, Y)$ et on écrit $(\overrightarrow{AN} | \overrightarrow{OM}) = 0$ et $\overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0}$ (ou une variante quelconque de cette relation qui exprime que les points sont alignés).

On obtient les relations $(X - a)x + Yy = 0$ et $Yx = yX$. Si on tire y de la deuxième équation on obtient $y = \frac{Yx}{X}$ et si l'on reporte dans la première on a, en simplifiant par x , $X^2 + Y^2 - aX = 0$: le cercle \mathcal{C} de diamètre $[OA]$.

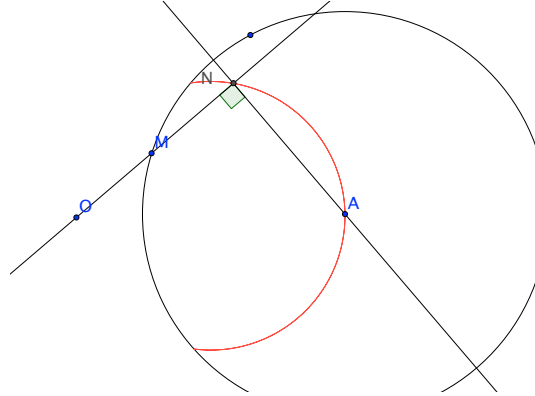


FIGURE 6 – Un lieu limité (1)

4.1 Remarques. 1) Dans ce calcul, on a supposé $x \neq 0$ et $X \neq 0$. Si x est nul, y ne l'est pas et on obtient $X = Y = 0$, le point N est en O et il est bien sur le cercle \mathcal{C} . Si X est nul on a $Yx = 0$ et $Yy = ax$ et on trouve encore $Y = 0$, donc le point O .

2) On note que le point O est dans le lieu si et seulement si la perpendiculaire à (OA) en O coupe Γ .

Comme M n'est pas en O on a $x^2 + y^2 \neq 0$ et on peut calculer X et Y :

$$X = \frac{ax^2}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{axy}{x^2 + y^2}.$$

On note qu'on a $X = \lambda x$ et $Y = \lambda y$ avec $\lambda = \frac{ax}{x^2 + y^2}$.

Si Γ est une partie quelconque de \mathbf{R}^2 on considère le cône $\widehat{\Gamma}$ de sommet O de base Γ :

$$\widehat{\Gamma} = \{N \in \mathcal{P} \mid \exists \lambda \in \mathbf{R}, \exists M \in \Gamma, \overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OM}\}.$$

On a alors le résultat suivant :

4.2 Proposition. Avec les notations précédentes, soit Γ une partie quelconque du plan. À l'exception peut-être du point O (traité en 4.1), l'ensemble des points N du lieu associé à Γ est l'intersection du cercle \mathcal{C} et du cône $\widehat{\Gamma}$.

Démonstration. Le cas $O = A$ est trivial car le cercle est alors réduit au point $O = A$. On suppose désormais $O \neq A$. On a vu que les points du lieu sont sur le cercle et ils sont sur le cône car O, N, M sont alignés. Inversement, soit N un point de $\mathcal{C} \cap \widehat{\Gamma}$. Le cas de O a été vu en 4.1. Si N est égal à A ,

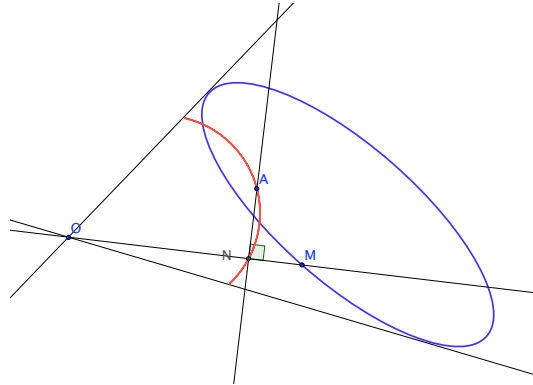


FIGURE 7 – Un lieu limité (2)

comme il est dans le cône, la droite (ON) coupe Γ en M et N est atteint par ce point. Supposons donc $N \neq O, A$. On considère la droite (ON) . Comme N est dans le cône, elle coupe Γ en M . Comme N est sur le cercle, les droites $(ON) = (OM)$ et (AN) sont perpendiculaires et N est bien le projeté orthogonal de A sur (OM) .

5 D'autres exemples

Il s'agit encore d'exemples de lieux images à l'exception des deux premiers.

5.1 Les aires égales

5.1 Exercice. Soit ABC un triangle. Quel est le lieu des points M tels que $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$.

C'est la médiane issue de A , sans nul doute. D'ailleurs, j'en ai deux démonstrations différentes. Quoique ... Voir sur ma page web le Cours 1 du *Projet de géométrie*.

5.2 L'exercice d'Orlane

Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan. Déterminer le lieu des points M vérifiant une des conditions suivantes :

- 1) Les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ sont colinéaires.
- 2) Les vecteurs $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$ sont colinéaires.
- 3) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.
- 4) $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\|$.

(Introduire les milieux I, J, K de $[AB]$, $[CD]$ et $[BC]$. Pour 3), attention au cas $I = J$. On est dans le cas image réciproque. C'est clair pour 3) et 4) avec la différence des normes. Pour 1) et 2) la fonction à considérer est le déterminant des vecteurs.)

5.3 Le lieu de l'orthocentre

5.2 Exercice. On considère deux points fixes B, C distincts. Le point A varie sur une certaine courbe Γ , par exemple un cercle passant par B et C . Quel est le lieu de l'orthocentre H de ABC ? (Voir l'article [DPR].)

5.4 Le problème d'Olivier Girod

5.3 Exercice. Soit A un point fixe et Γ un cercle. Soit $M \in \Gamma$, H le milieu de $[AM]$ et P sur la médiatrice de $[AM]$, à une distance donnée de H . Déterminer le lieu de P .

C'est encore un exercice où le résultat n'est pas simple et où seul le calcul peut donner quelque chose.

5.5 Le lieu du centre du cercle circonscrit

5.4 Exercice. Un point E varie sur le cercle circonscrit à un triangle ABC . La droite (AE) coupe (BC) en D . Quel est le lieu du centre I du cercle circonscrit au triangle BDE ?

Voir sur ma page web à la rubrique *Sur la géométrie*.

5.6 Podaire

5.5 Exercice. Soit Γ un cercle et A un point du plan. Soit $M \in \Gamma$, D la tangente à Γ en M , N le projeté orthogonal de A sur D . Quel est le lieu de N quand M varie sur Γ ? (On trouve un limaçon de Pascal.)

5.7 Un lieu de dimension 2

5.6 Exercice. Soit $T = ABC$ un triangle, P, Q deux points du bord ∂T de T . Quel est le lieu du milieu M de $[PQ]$?

L'expérience avec *Cabri* montre que ce lieu est de dimension 2 et précisément, si l'on est patient, que c'est le triangle plein T . Montrons cette assertion. D'abord, il est clair que M est dans T . Inversement, on se donne $M \in T$ et il s'agit de montrer qu'il est milieu de deux points P, Q du bord de T . C'est

évident si M est sur le bord car on prend $P = Q = M$. Supposons donc M intérieur et considérons le symétrique $\sigma_M(\partial T)$ par rapport à M . Il suffit de montrer qu'il rencontre ∂T en P car alors P et $\sigma_M(P) = Q$ conviennent. Il reste à montrer :

5.7 Lemme. *Soit T un triangle (supposé plein et fermé) et M un point intérieur à T . Le bord ∂T et son symétrique par rapport à M se rencontrent.*

Démonstration. Soit $T' = \sigma_M(T)$. On note d'abord que T° et $(T')^\circ$ se rencontrent en M . On note ensuite que T° rencontre l'extérieur de T' . En effet, sinon, on aurait $T^\circ \subset T'$, donc $T \subset T'$ en passant à l'adhérence. Comme T et T' sont isométriques ils ont même aire et cela impose $T = T'$ (sinon le complémentaire de T dans T' est d'intérieur non vide, donc d'aire non nulle). Mais c'est absurde car aucun triangle n'est invariant par symétrie centrale (regarder les sommets).

Comme ∂T est connexe, il en résulte, par le lemme du passage des frontières, que T° rencontre $\partial T'$.

Soit maintenant $S = \mathcal{P} - T$ l'extérieur de T . Il est clair que S rencontre l'extérieur de T' "à l'infini". Il rencontre aussi l'intérieur, par le même argument que ci-dessus appliqué à T' . On en déduit que S rencontre $\partial T'$. Mais alors $\partial T'$ qui rencontre l'intérieur et l'extérieur de T rencontre son bord et on a gagné.

6 Que faire au CAPES

Si l'on a compris ce qui est expliqué plus haut, on peut faire la distinction entre lieux images et images réciproques, avec des exemples. Sinon, on se contente d'exemples, mais choisis tout de même en pensant à cette idée.

6.1 Lieux images réciproques

- L'exemple $MA/MB = k$ me semble presque incontournable et facile. Une alternative est l'exercice 1.2.
- Dans un autre genre, celui des aires égales est très intéressant, avec sa double solution.
- L'exercice d'Orlane est intéressant lui aussi.
- On peut proposer un exercice sur la parabole, vue comme ensemble des points équidistants d'une droite et d'un point, avec une approche analytique.

6.2 Lieux images

- Le lieu de l'orthocentre est un exemple simple et intéressant.
- Les lieux de Destainville sont de bons exemples (si l'on s'en souvient), notamment le premier, pour montrer que l'image n'est – en général – pas simple.
- Le lieu limité, et celui de dimension 2 donnent deux exemples un peu exotiques.

7 Références

[DPR] DUPERRET Jean-Claude, PERRIN Daniel, RICHTON Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 2001.