Informatique Appliquée au Calcul Scientifique

Cours 8

Interpolation de Hermite

1) Une base de l'espace des polynomes de degré inférieur ou égal à trois
2) Interpolation de Hermite
3) Vers plus de régularité

François Dubois, décembre 2004, édition 03 août 2006, 12 pages.

IACS (8)

Interpolation de Hermite

(1) Une base de l'espace des polynomes de degré inférieur ou égal à trois

- Ce paragraphe est un gigantesque exercice. On cherche un polynome φ_1 (pour commencer) ayant les propriétés suivantes :

(1) φ_1 est un polynome de degré ≤ 3

(2) $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_1(1) = 0$, $\varphi_1'(0) = 0$, $\varphi_1'(1) = 0$.

Compte tenu de la condition $\varphi_1(1) = 0$, on peut diviser le polynome $\varphi_1(\theta)$ par le monome $(\theta - 1)$ et on a :

(3) $\varphi_1(\theta) = (\theta - 1)\,\psi(\theta)$, $\psi(\theta) \equiv a + b\theta + c\theta^2$.

- Exploitons maintenant la condition $\varphi_1'(1) = 0$; nous calculons $\varphi_1'(\theta)$ à partir de la relation (3) : $\varphi_1'(\theta) = \psi(\theta) + (\theta - 1)\,\psi'(\theta)$. Donc $\varphi_1'(1) = \psi(1) = 0$ et on peut à nouveau factoriser $(\theta - 1)$ dans l'expression de $\psi(\theta)$. On a $\psi(\theta) = (\theta - 1)(\alpha + \beta\theta)$.

(4) $\varphi_1(\theta) = (\theta - 1)^2 (\alpha + \beta\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

- Il reste à exploiter les relations $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_1'(0) = 0$. Pour la première, on a, compte tenu de la relation (4) : $\varphi_1(0) = \alpha$. Donc $\alpha = 1$. Pour la seconde,
$\varphi_1'(\theta) = 2(\theta - 1)(\alpha + \beta\theta) + (\theta - 1)^2 \beta$, donc
$\varphi_1'(0) = -2\alpha + \beta$ et $\beta = 2$. Nous retenons

(5) $\varphi_1(\theta) = (\theta-1)^2(1+2\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Nous représentons graphiquement cette fonction à la figure 1.

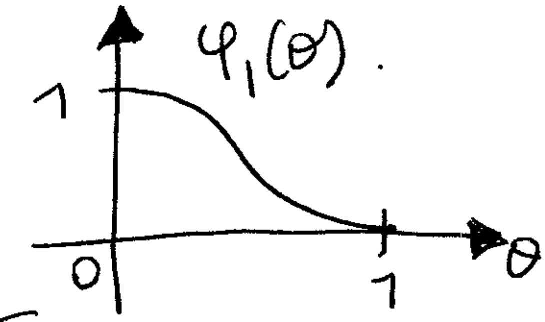

Figure 1

- Nous poursuivons ce travail avec la fonction polynomiale φ_2, qui ressemble beaucoup à φ_1 :

(6) φ_2 polynome de degré ≤ 3

(7) $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2(1) = 1$, $\varphi_2'(0) = 0$, $\varphi_2'(1) = 0$.

on peut reprendre l'ensemble du raisonnement précédent et nous invitons le lecteur à le faire. On peut aussi remarquer que la fonction $f(\theta) = \varphi_1(1-\theta)$ satisfait les relations (6) et (7). On a donc $\varphi_2(\theta) = \theta^2(1+2(1-\theta))$, soit

(8) $\varphi_2(\theta) = \theta^2(3-2\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

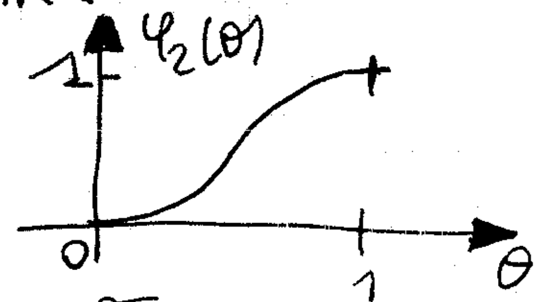

Figure 2.

- La définition de φ_3 est la suite "naturelle" des relations (2) et (7) :

(9) φ_3 polynome de degré ≤ 3

(10) $\varphi_3(0) = 0$, $\varphi_3(1) = 0$, $\varphi_3'(0) = 1$, $\varphi_3'(1) = 0$.

Le raisonnement fait plus haut pour φ_1 pour exploiter les conditions $\varphi_1(1) = 0$, $\varphi_1'(1) = 0$ et aboutir à l'expression (4) peut être réitéré sans modification. Comme $\varphi_3(0) = 0$, on a donc nécessairement

(11) $\varphi_3(\theta) = \alpha\, \theta(\theta-1)^2$, $\theta \in \mathbb{R}$.

La détermination de α demande d'évaluer φ_3' à partir de l'expression (11). Il vient clairement $\varphi_3'(0) = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta}\left(\varphi_3(\theta) - \varphi_3(0)\right) = \alpha$. D'où

(12) $\varphi_3(\theta) = \theta(\theta-1)^2, \ \theta \in \mathbb{R}$.

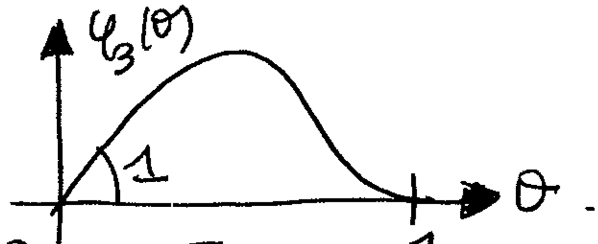

Figure 3

On commence à se rendre compte de l'intérêt de l'interpolation de Hermite : la fonction φ_3 est non nulle (voir sa représentation graphique Figure 3) alors que $\varphi_3(0) = \varphi_3(1) = 0$!

- Nous terminons par la fonction φ_4, défini par

(13) φ_4 polynome de degré ≤ 3

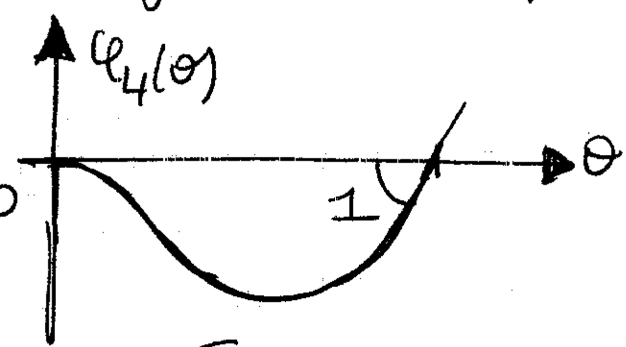

Figure 4

(14) $\varphi_4(0) = \varphi_4(1) = 0, \ \varphi_4'(0) = 0, \ \varphi_4'(1) = 1$.

Le changement de θ en $(1-\theta)$ dans la relation (11) permet de satisfaire automatiquement aux trois premières relations de (14). On cherche donc $\varphi_4(\theta)$ sous la forme $\varphi_4(\theta) = \alpha(1-\theta)\,\theta^2$. On a $\varphi_4'(\theta) = -\alpha\theta^2 + 2\alpha(1-\theta)\theta$, donc $\varphi_4'(1) = -\alpha$ et

(15) $\varphi_4(\theta) = (\theta-1)\,\theta^2, \ \theta \in \mathbb{R}$.

Nous remarquons que $\varphi_4(\theta) \leq 0$ si $0 \leq \theta \leq 1$, ainsi qu'illustré à la figure 4.

- Si les relations (5), (8), (12) et (15) qui permettent de calculer effectivement les quatre fonctions φ_j $(1 \leq j \leq 4)$, elles sont moins utiles que les définitions (2), (7), (10) et (14), qu'on peut résumer dans le tableau suivant

(16)

polynome de degré ≤ 3 $\}f$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$f(0)$	1	0	0	0
$f(1)$	0	1	0	0
$f'(0)$	0	0	1	0
$f'(1)$	0	0	0	1

- Nous avons enfin le

Théorème 1 Base de polynomes.

Tout polynome p de degré ≤ 3 peut s'exprimer de manière <u>unique</u> au moyen des quatre polynomes $(\varphi_j)(1 \leq j \leq 4)$ introduits ci-dessus : $\exists a_j \in \mathbb{R} \,/\, p = \sum_{j=1}^{4} a_j \varphi_j$. Plus précisément, on a

(17) $\quad p(\theta) = p(0)\varphi_1(\theta) + p(1)\varphi_2(\theta) + p'(0)\varphi_3(\theta) + p'(1)\varphi_4(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$

Preuve du théorème 1

- On pose $f(\theta) = p(\theta) - (p(0)\varphi_1(\theta) + p(1)\varphi_2(\theta) + p'(0)\varphi_3(\theta) + p'(1)\varphi_4(\theta))$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Alors f est un polynome de degré ≤ 3 qui vérifie $f(0) = p(0) - p(0) = 0$ compte tenu de (16), $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$. Si $f \neq 0$, on peut factoriser $\theta^2(1-\theta)^2$, ce qui est exclu car ce polynome est de degré 4. Donc f est nul et l'existence des a_j tel que $p = \sum_{j=1}^{4} a_j \varphi_j$ est démontrée.
- L'unicité résulte du tableau (16). Si $p = \sum_j a_j \varphi_j$, on

a nécessairement $p(0) = a_1 \varphi_1(0) + a_2 \varphi_2(0) + a_3 \varphi_3(0) + a_4 \varphi_4(0)$ $= (a_1 \times 1) + (a_2 \times 0) + (a_3 \times 0) + (a_4 \times 0) = a_1$. De manière analogue, $p(1) = a_2$, $p'(0) = a_1 \varphi_1'(0) + a_2 \varphi_2'(0) + a_3 \varphi_3'(0) + a_4 \varphi_4'(0) = \underline{(a_1 \times 0) + (a_2 \times 0) + (a_3 \times 1) + (a_4 \times 0)}$ $= a_3$ (c'est la troisième ligne de (16)). Enfin $p'(1) = a_4$, ce qui établit la relation (17) et termine la démonstration. $\square$

② Interpolation de Hermite

- Nous supposons maintenant disposer d'un intervalle $[a, b]$ et de valeurs intermédiaires $x_1, \dots, x_{N-1}$ de sorte que

(18) $\quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_N = b$.

On se donne d'une part des valeurs nodales $u_0, u_1, \dots, u_N$ et des "pentes locales" $v_0, \dots, v_N$. On cherche une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ assez régulière, c'est à dire techniquement

(19) $\quad f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuement dérivable

qui d'une part, interpole les données u_j au point de grille x_j :

(20) $\quad f(x_j) = u_j \,, \quad 0 \leq j \leq N$

et d'autre part respecte les pentes locales v_j :

(21) $\quad f'(x_j) = v_j \,, \quad 0 \leq j \leq N$.

En quelque sorte, la dérivée f' de la fonction f interpole les valeurs $(v_j)_{0 \leq j \leq N}$ aux points $(x_j)_{0 \leq j \leq N}$ de la grille.

- L'interpolation de Hermite permet de résoudre le problème précédent. On choisit

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ polynome de degré} \leq 3 \text{ dans} \\ \text{l'intervalle } [x_j, x_{j+1}], \quad 0 \leq j \leq N-1 . \end{array} \right.$$

Il suffit alors de résoudre le problème suivant dans un intervalle $[x_j, x_{j+1}]$:
trouver $p_{j+1/2}$, polynome de degré ≤ 3 de sorte que

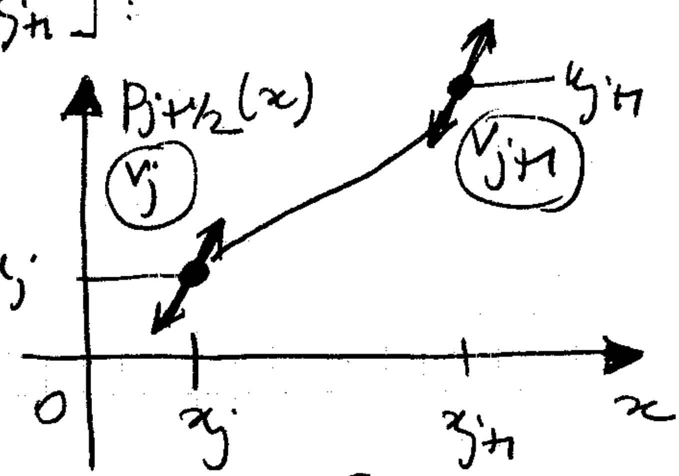

Figure 5

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} p_{j+1/2}(x_j) = u_j , \\ p_{j+1/2}(x_{j+1}) = u_{j+1} , \\ p'_{j+1/2}(x_j) = v_j \\ p'_{j+1/2}(x_{j+1}) = v_{j+1} . \end{array} \right.$$

Après un changement d'échelle très simple, le problème (23) se ramène à ce qui a été introduit au premier paragraphe. On paramètre $x \in [x_j, x_{j+1}]$ à l'aide d'une variable $\theta \in [0,1]$:

$$(24) \qquad x = (1-\theta)\, x_j + \theta\, x_{j+1} , \qquad 0 \leq \theta \leq 1$$

et on cherche $p_{j+1/2}(x)$ sous la forme

$$(25) \qquad p_{j+1/2}(x) = \xi_{j+1/2}(\theta) , \quad 0 \leq \theta \leq 1 .$$

- on dérive la relation (25) par rapport à θ, en utilisant la relation $\frac{dx}{d\theta} = x_{j+1} - x_j$ issue de (24). Il vient

$$(x_{j+1} - x_j)\, \frac{dp_{j+1/2}}{dx} = \frac{d\xi_{j+1/2}}{d\theta}$$

et les relations (23) prennent maintenant la forme

(26) $\xi_{j+1/2}$ polynome de degré ≤ 3

$$(27)\left\{\begin{array}{l} \xi_{j+1/2}(0) = u_j\,,\ \xi_{j+1/2}(1) = u_{j+1}\,, \\ \xi'_{j+1/2}(0) = (x_{j+1} - x_j)\, v_j\,,\ \xi'_{j+1/2}(1) = (x_{j+1} - x_j)\, v_{j+1}\,. \end{array}\right.$$

- Il suffit maintenant d'utiliser la représentation (17) sur la base des fonctions $(\varphi_k(\theta))_{1 \leq k \leq 4}$ pour définir complètement $\xi_{j+1/2}$:

$$(28)\quad \xi_{j+1/2}(\theta) = u_j\,\varphi_1(\theta) + u_{j+1}\,\varphi_2(\theta) + (x_{j+1} - x_j)\big[v_j\,\varphi_3(\theta) + v_{j+1}\,\varphi_4(\theta)\big]$$

on peut aussi revenir à la variable initiale $x \in [x_j, x_{j+1}]$ grâce à la relation (24) pour exprimer $p_{j+1/2}(x)$, compte tenu de (25) :

$$(29)\left\{\begin{array}{l} p_{j+1/2}(x) = u_j\,\varphi_1\left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right) + u_{j+1}\,\varphi_2\left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right) \\ \qquad + (x_{j+1} - x_j)\left[v_j\,\varphi_3\left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right) + v_{j+1}\,\varphi_4\left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right)\right], \\ \qquad\qquad x_j \leq x \leq x_{j+1}\,. \end{array}\right.$$

(3) Vers plus de régularité

- Nous disposons toujours de valeurs x_j sur l'intervalle $[a,b]$ (relation (18)) et de données $(u_j)_{0\leq j\leq N}$ et nous cherchons une fonction

(30) $\quad \sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable

de sorte que (20) ait lieu, c'est à dire ici

(31) $\quad \sigma(x_j) = u_j \,, \quad 0 \leq j \leq N$.

- Nous ne disposons plus maintenant de valeurs données $(v_j)_{0\leq j\leq N}$, ce qui ne permet plus de construire un interpolé de Hermite comme au paragraphe précédent. Nous allons calculer ces valeurs v_j (maintenant inconnues) en renforçant la régularité (30), c'est à dire

(32) $\quad \sigma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable.

- Si on détermine σ dans chaque intervalle par

(33) $\quad \sigma\big((1-\theta)\, x_j + \theta x_{j+1}\big) = \xi_{j+1/2}(\theta) \,, \quad 0 \leq \theta \leq 1$

avec $\xi_{j+1/2}$ polynome de degré ≤ 3, la représentation (28) est très régulière dans l'intervalle ouvert $]0,1[$ (donc pour $x \in\,]x_j, x_{j+1}[$ et la condition de double dérivabilité (32) doit être exprimée aux points de grille x_1 à x_{N-1}, en imposant à la dérivée seconde d'être continue.

- on calcule donc dans la suite de ce paragraphe $\sigma''_g(x_j)$ "à gauche", c'est à dire la valeur limite de $\sigma''(x)$ pour $x \xrightarrow{<} x_j$ et la limite de $\sigma''(x)$ pour $x \xrightarrow{>} x_j$, soit $\sigma''_d(x_j)$ "à droite". on commence par les fonctions de base φ_1 à φ_4.

Prop 1 on a

$$(34)\quad \begin{cases} \varphi''_1(0) = -6, & \varphi''_1(1) = 6 \\ \varphi''_2(0) = 6, & \varphi''_2(1) = -6 \\ \varphi''_3(0) = -4, & \varphi''_3(1) = 2 \\ \varphi''_4(0) = -2, & \varphi''_4(1) = 4 . \end{cases}$$

Preuve de la proposition 1

- on a de (5) : $\varphi_1(\theta) = (\theta-1)^2(1+2\theta) = (1-2\theta+\theta^2)(1+2\theta)$ $= 1 - 3\theta^2 + 2\theta^3$. Donc $\varphi'_1(\theta) = -6\theta + 6\theta^2$ et
  (35) $\varphi''_1(\theta) = -6 + 12\theta$.
- De même en partant de la relation (8) :
  $\varphi_2(\theta) = \theta^2(3-2\theta) = 3\theta^2 - 2\theta^3$; $\varphi'_2(\theta) = 6\theta - 6\theta^2$ et
  (36) $\varphi''_2(\theta) = 6 - 12\theta$.
- La relation (12) permet d'exprimer φ_3 :
  $\varphi_3(\theta) = \theta(\theta-1)^2 = \theta^3 - 2\theta^2 + \theta$, donc $\varphi'_3(\theta) = 1 - 4\theta + 3\theta^2$,
  (37) $\varphi''_3(\theta) = -4 + 6\theta$
- Enfin, la relation (15) explicite $\varphi_4(\theta) = (\theta-1)\theta^2$, donc
  $\varphi'_4(\theta) = -2\theta + 3\theta^2$, et
  (38) $\varphi''_4(\theta) = -2 + 6\theta$.
- Les relations (34) sont alors conséquence immédiate de (35) à (38), avec successivement $\theta=0$ et $\theta=1$. □

- On utilise les relations (33) et (28) pour calculer les dérivées de σ ; on dérive d'abord (33) par rapport à θ :

$$(x_{j+1}-x_j)\,\sigma'((1-\theta)x_j+\theta x_{j+1}) = u_j\,\varphi_1'(\theta) + u_{j+1}\,\varphi_2'(\theta) + (x_{j+1}-x_j)\left[v_j\,\varphi_3'(\theta) + v_{j+1}\,\varphi_4'(\theta)\right]$$

et on recommence :

$$(39)\left\{\begin{array}{l} (x_{j+1}-x_j)^2\,\sigma''((1-\theta)x_j+\theta x_{j+1}) = u_j\,\varphi_1''(\theta) + u_{j+1}\,\varphi_2''(\theta) \\ \qquad + (x_{j+1}-x_j)\left[v_j\,\varphi_3''(\theta) + v_{j+1}\,\varphi_4''(\theta)\right], \quad 0 \leq \theta \leq 1 \end{array}\right.$$

- Si on prend $\theta = 0$ dans la relation (39), on calcule $\sigma''(x_j)$ considéré dans l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, c'est à dire la limite de $\sigma''(x)$ pour $x \overset{>}{\to} x_j$, soit $\sigma_d''(x_j)$ (cf Figure 6).

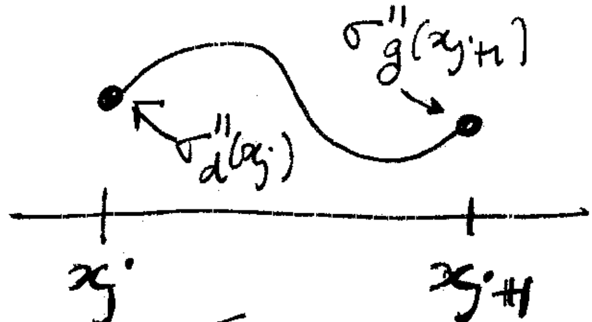

Figure 6

On déduit donc de (39) avec $\theta = 0$ et de (34)

$$(40)\quad (x_{j+1}-x_j)^2\,\sigma_d''(x_j) = 6(u_{j+1}-u_j) + (x_{j+1}-x_j)(-4v_j - 2v_{j+1})$$

- Pour évaluer $\sigma_g''(x_j)$, la relation (39) n'est pas directement utilisable puisqu'elle permet d'évaluer $\sigma_g''(x_{j+1})$ pour $\theta = 1$ et <u>non</u> $\sigma_g''(x_j)$. On doit d'abord se placer dans l'intervalle $[x_{j-1}, x_j]$, c'est à dire changer j en $j-1$ dans la relation (39). Cette opération n'offre pas de difficulté :

$$(41)\left\{\begin{array}{l} (x_j-x_{j-1})^2\,\sigma''((1-\theta)x_{j-1}+\theta x_j) = u_{j-1}\,\varphi_1''(\theta) + u_j\,\varphi_2''(\theta) \\ \qquad + (x_j-x_{j-1})\left[v_{j-1}\,\varphi_3''(\theta) + v_j\,\varphi_4''(\theta)\right], \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{array}\right.$$

On prend $\theta = 1$ dans cette relation et on utilise les relations (34). Nous obtenons :

(42) $(x_j - x_{j-1})^2 \sigma''_g(x_j) = -6(u_j - u_{j-1}) + (x_j - x_{j-1})(2v_{j-1} + 4v_j)$.

- On peut réécrire les deux valeurs obtenues pour la dérivée au sommet x_j :

$$(43) \begin{cases} \sigma''_g(x_j) = -6 \dfrac{u_j - u_{j-1}}{(x_j - x_{j-1})^2} + 2 \dfrac{v_{j-1} + 2v_j}{(x_j - x_{j-1})}, & 1 \leq j \leq N-1 . \\ \sigma''_d(x_j) = 6 \dfrac{u_{j+1} - u_j}{(x_{j+1} - x_j)^2} - 2 \dfrac{2v_j + v_{j+1}}{(x_{j+1} - x_j)} . & \end{cases}$$

Pour exprimer le fait que σ est deux fois continûment dérivable (on dit σ "de classe $\mathcal{C}^2$" et on écrit $\sigma \in \mathcal{C}^2([a, b])$), on égalise $\sigma''_g(x_j)$ et $\sigma''_d(x_j)$. Il vient

$$(44) \begin{cases} \dfrac{1}{x_j - x_{j-1}} v_{j-1} + \left[\dfrac{2}{x_j - x_{j-1}} + \dfrac{2}{x_{j+1} - x_j} \right] v_j + \dfrac{1}{x_{j+1} - x_j} v_{j+1} = \\ \qquad = 3 \left[\dfrac{u_{j+1} - u_j}{(x_{j+1} - x_j)^2} + \dfrac{u_j - u_{j-1}}{(x_j - x_{j-1})^2} \right] \end{cases}$$

- Pour continuer les calculs, il est raisonnable de supposer tous les $x_{k+1} - x_k$ égaux :

(45) $$x_{j+1} - x_j = x_j - x_{j-1} = \Delta x = \frac{b-a}{N} .$$

La relation (44) prend alors la forme

(46) $$v_{j-1} + 4v_j + v_{j+1} = \frac{3}{\Delta x}(u_{j+1} - u_{j-1}), \quad 1 \leq j \leq N-1$$

- La condition de raccord de la dérivée seconde nous a fourni (N-1) équations <u>linéaires</u> pour tenter de calculer les dérivées v_j aux points de la grille. Mais nous ne disposons que de $(N-1)$ équations alors que nous avons $(N+1)$ inconnues v_j pour $0 \leq j \leq N$. On ajoute aux conditions précédentes la contrainte "naturelle"

$$(47) \qquad \sigma''(a) = 0, \quad \sigma''(b) = 0.$$

Ces conditions s'expriment grâce à (39) pour $j=0$ et $\theta=0$ pour la condition $\sigma''(a)=0$ et pour $j=N-1$ et $\theta=1$ pour $\sigma''(b)=0$. Il vient

$$(48) \qquad \Delta x^2 \, \sigma''(a) = 6(u_1 - u_0) + \Delta x \, (-4v_0 - 2v_1)$$

$$(49) \qquad \Delta x^2 \, \sigma''(b) = -6(u_N - u_{N-1}) + \Delta x \, (2v_{N-1} + 4v_N)$$

et les conditions (47) prennent la forme

$$(50) \qquad 2v_0 + v_1 = \frac{3}{\Delta x}(u_1 - u_0)$$

$$(51) \qquad v_{N-1} + v_N = \frac{3}{\Delta x}(u_N - u_{N-1}).$$

- Nous disposons maintenant, avec (50), (46) et (51) de $(N+1)$ équations linéaires d'inconnues $v_0, \ldots, v_N$ qu'il va falloir résoudre.

F.D., dec 2004.