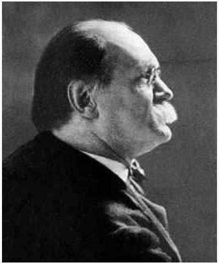
Taquin bloc à changer

Thomas Mordant

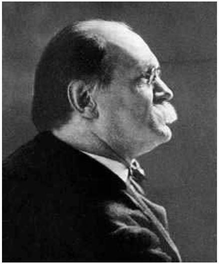
22 novembre 2018

Maths
Pour Tous

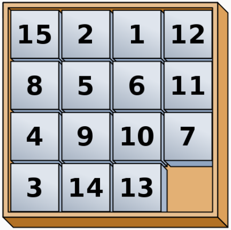
Introduction



Sam Loyd (1841-1911)



Sam Loyd (1841-1911)



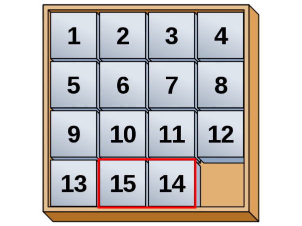
Problème

Problème

Objectif :

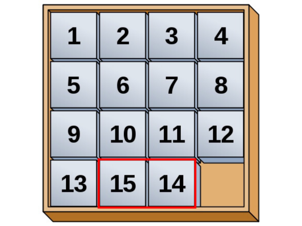
Problème

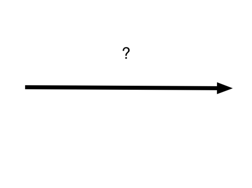
Objectif :



Problème

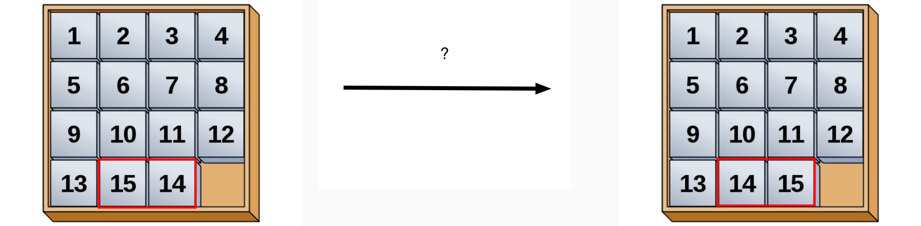
Objectif :





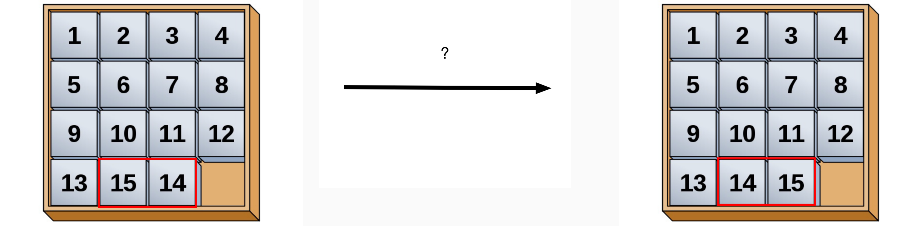
Problème

Objectif :



Problème

Objectif :



Récompense de 1000 dollars pour la résolution, non réclamée.

Pouvons-nous trouver une **solution** ?

Sommaire

Exemple de solution possible :

Étape 1 : Mettre 14 dans l'espace vide ;

Étape 2 : Mettre 11 dans l'espace vide ;

etc.

Exemple de solution possible :
Étape 1 : Mettre 14 dans l'espace vide ;
Étape 2 : Mettre 11 dans l'espace vide ;
etc.

Définition (solution)

Une **solution** au Taquin est une **suite d'étapes**,

Exemple de solution possible :

Étape 1 : Mettre 14 dans l'espace vide ;

Étape 2 : Mettre 11 dans l'espace vide ;

etc.

Définition (solution)

Une **solution** au Taquin est une **suite d'étapes**, chacune consistant à mettre dans l'espace vide un bloc se trouvant à côté,

Exemple de solution possible :
Étape 1 : Mettre 14 dans l'espace vide ;
Étape 2 : Mettre 11 dans l'espace vide ;
etc.

Définition (solution)

Une **solution** au Taquin est une **suite d'étapes**, chacune consistant à mettre dans l'espace vide un bloc se trouvant à côté, telle que, à la fin de l'**exécution des étapes dans l'ordre**,

Exemple de solution possible :
Étape 1 : Mettre 14 dans l'espace vide ;
Étape 2 : Mettre 11 dans l'espace vide ;
etc.

Définition (solution)

Une **solution** au Taquin est une **suite d'étapes**, chacune consistant à mettre dans l'espace vide un bloc se trouvant à côté, telle que, à la fin de l'**exécution des étapes dans l'ordre**, les blocs 14 et 15 soient remis dans l'ordre.

Méthode

Existe-t-il une solution ?

Méthode

Existe-t-il une solution ?

Méthode : supposer qu'on a une solution et chercher le plus possible d'informations dessus.

Méthode

Existe-t-il une solution ?

Méthode : supposer qu'on a une solution et chercher le plus possible d'informations dessus.

$\longrightarrow$ Si une solution existe, plus facile à trouver.

Méthode

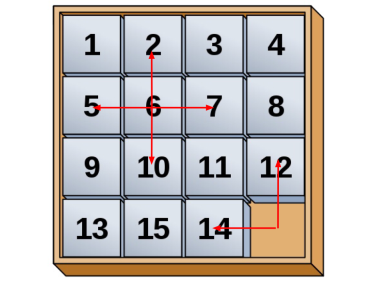
Existe-t-il une solution ?

Méthode : supposer qu'on a une solution et chercher le plus possible d'informations dessus.

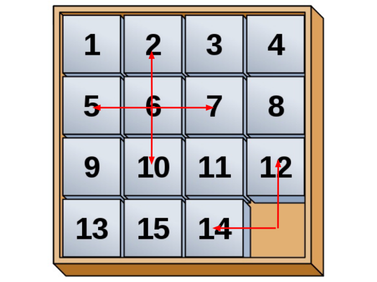
$\longrightarrow$ Si une solution existe, plus facile à trouver.
$\longrightarrow$ Si les informations finissent par se contredire, alors une solution ne peut pas exister *(raisonnement par l'absurde)*.

Déplacements de la case vide :

Déplacements de la case vide :

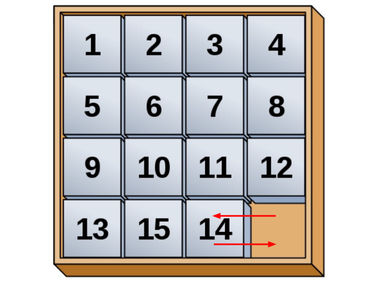


Déplacements de la case vide :



Nombre d'étapes ?

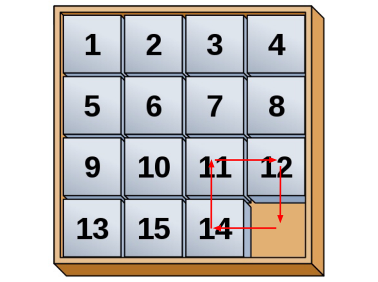
Déplacements de la case vide :



Nombre d'étapes ?

Exemple 1 : 2 étapes

Déplacements de la case vide :

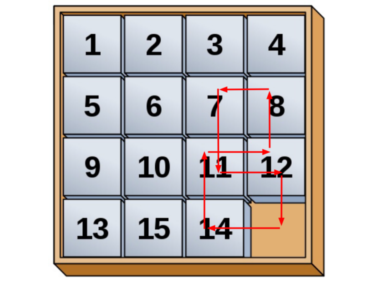


Nombre d'étapes ?

Exemple 1 : 2 étapes

Exemple 2 : 4 étapes

Déplacements de la case vide :



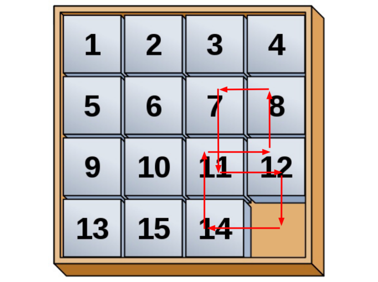
Nombre d'étapes ?

Exemple 1 : 2 étapes

Exemple 2 : 4 étapes

Exemple 3 : 8 étapes

Déplacements de la case vide :



Nombre d'étapes ?

Exemple 1 : 2 étapes

Exemple 2 : 4 étapes

Exemple 3 : 8 étapes

Hypothèse : nombre d'étapes toujours **pair**.

Théorème

Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours ***pair****.*

Théorème

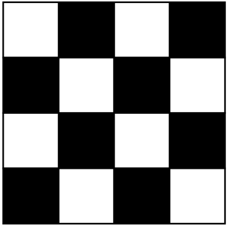
Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours ***pair****.*

Démonstration.

Théorème

*Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours **pair**.*

Démonstration.

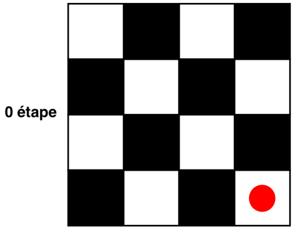


Théorème

*Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours **pair**.*

Démonstration.

Au départ : case vide = blanche



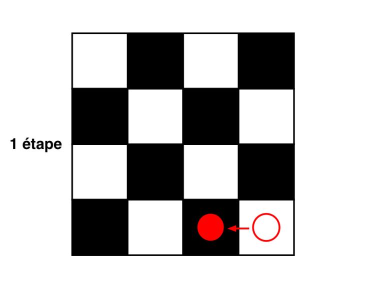
Théorème

Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours ***pair****.*

Démonstration.

Au départ : case vide = blanche

Après 1 étape : case vide = noire



Théorème

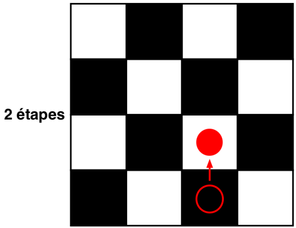
*Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours **pair**.*

Démonstration.

Au départ : case vide = blanche

Après 1 étape : case vide = noire

Après 2 étapes : case vide = blanche



Théorème

Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours ***pair****.*

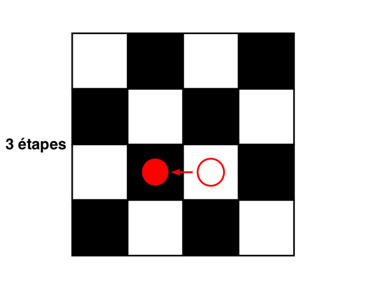
Démonstration.

Au départ : case vide = blanche

Après 1 étape : case vide = noire

Après 2 étapes : case vide = blanche

Après 3 étapes : case vide = noire



Théorème

*Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours **pair**.*

Démonstration.

Au départ : case vide = blanche

Après 1 étape : case vide = noire

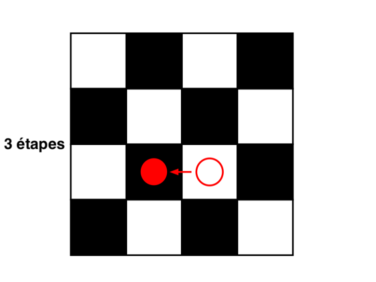
Après 2 étapes : case vide = blanche

Après 3 étapes : case vide = noire

...

Après nombre **pair** d'étapes : **blanche**

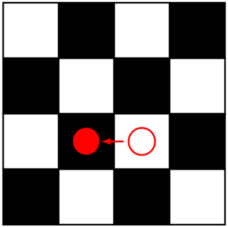
Après nombre **impair** d'étapes : **noire**



Théorème

Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours ***pair****.*

Démonstration.



Au départ : case vide = blanche

Après 1 étape : case vide = noire

Après 2 étapes : case vide = blanche

Après 3 étapes : case vide = noire

...

Après nombre **pair** d'étapes : **blanche**

Après nombre **impair** d'étapes : **noire**

La case vide retourne à son point de départ

Théorème

Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours ***pair****.*

Démonstration.

Au départ : case vide = blanche

Après 1 étape : case vide = noire

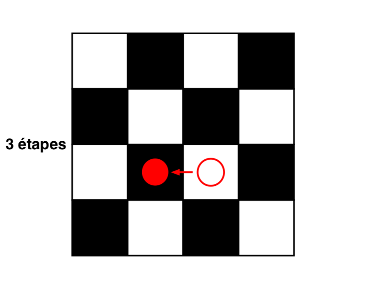
Après 2 étapes : case vide = blanche

Après 3 étapes : case vide = noire

...

Après nombre **pair** d'étapes : **blanche**

Après nombre **impair** d'étapes : **noire**



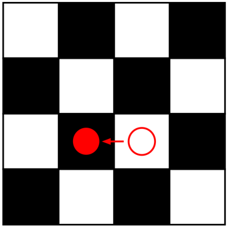
La case vide retourne à son point de départ

$\longrightarrow$ case **blanche**

Théorème

*Le nombre d'étapes d'une solution doit être toujours **pair**.*

Démonstration.



Au départ : case vide = blanche

Après 1 étape : case vide = noire

Après 2 étapes : case vide = blanche

Après 3 étapes : case vide = noire

...

Après nombre **pair** d'étapes : **blanche**

Après nombre **impair** d'étapes : **noire**

La case vide retourne à son point de départ

$\longrightarrow$ case **blanche**

$\longrightarrow$ nombre **pair** d'étapes. *C.Q.F.D.*

Argument du damier $\longrightarrow$ ~~Solution en un nombre impair d'étapes~~

Argument du damier $\longrightarrow$ ~~Solution en un nombre impair d'étapes~~

Solution en un nombre pair d'étapes ?

Argument du damier $\longrightarrow$ ~~Solution en un nombre impair d'étapes~~

Solution en un nombre pair d'étapes ?

Idée qu'ont eue les mathématiciens :

Argument du damier $\longrightarrow$ ~~Solution en un nombre impair d'étapes~~

Solution en un nombre pair d'étapes ?

Idée qu'ont eue les mathématiciens :

- Complètement oublier la géométrie,

Argument du damier $\longrightarrow$ ~~Solution en un nombre impair d'étapes~~

Solution en un nombre pair d'étapes ?

Idée qu'ont eue les mathématiciens :

- Complètement oublier la géométrie,
- Étudier l'ordre des blocs, et la manière dont chaque étape change cet ordre.

Simplification du problème :

Simplification du problème :

- Oublier qu'une case ne change de place qu'avec ses voisins ;

Simplification du problème :

- Oublier qu'une case ne change de place qu'avec ses voisins ;
- Oublier la spécificité de la case vide : « case 16 ».

Problème simplifié

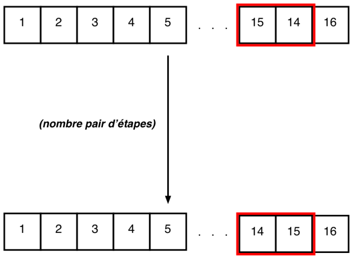
On a 16 éléments.

Problème simplifié

On a 16 éléments. À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents.

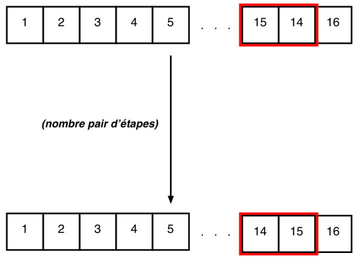
Problème simplifié

On a 16 éléments. À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents. Peut-on échanger les éléments 14 et 15 en un nombre ***pair*** *d'étapes ?*



Problème simplifié

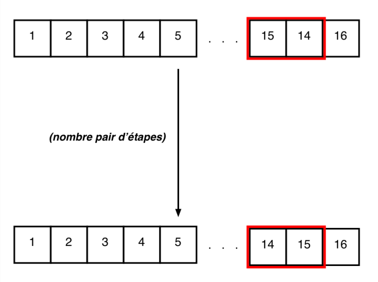
On a 16 éléments. À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents. Peut-on échanger les éléments 14 et 15 en un nombre ***pair*** *d'étapes ?*



Pourquoi ce problème ?

Problème simplifié

*On a 16 éléments. À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents. Peut-on échanger les éléments 14 et 15 en un nombre **pair** d'étapes ?*

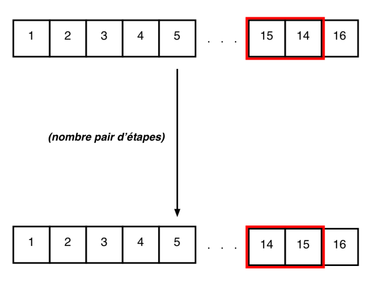


Pourquoi ce problème ?

Solution paire problème initial $\Longrightarrow$ Solution problème simplifié

Problème simplifié

*On a 16 éléments. À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents. Peut-on échanger les éléments 14 et 15 en un nombre **pair** d'étapes ?*

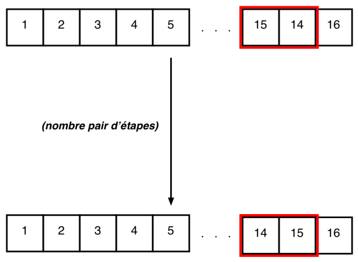


Pourquoi ce problème ?

Solution paire problème initial $\Longrightarrow$ Solution problème simplifié
Pas de solution au problème simplifié $\Longrightarrow$ Pas de solution paire problème initial

Problème simplifié

*On a 16 éléments. À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents. Peut-on échanger les éléments 14 et 15 en un nombre **pair** d'étapes ?*



Pourquoi ce problème ?

Solution paire problème initial $\Longrightarrow$ Solution problème simplifié
Pas de solution au problème simplifié $\Longrightarrow$ Pas de solution paire problème initial
$+$ Pas de solution impaire problème initial (connu) $\Longrightarrow$ ***Pas de solution du tout au problème initial***

Sommaire

Objectif de la partie

Objectif de la partie

Objectif : introduire des notions pour avoir :

Théorème voulu

Les transpositions sont impaires.

Qu'est-ce qu'une étape ?

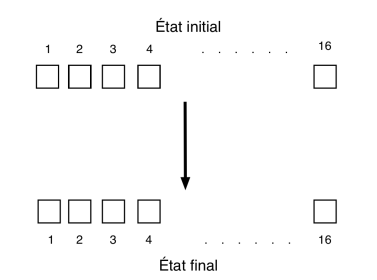
Qu'est-ce qu'une étape ?

Étape = **mélange des blocs**

Qu'est-ce qu'une étape ?

Étape = **mélange des blocs**

État initial et état final

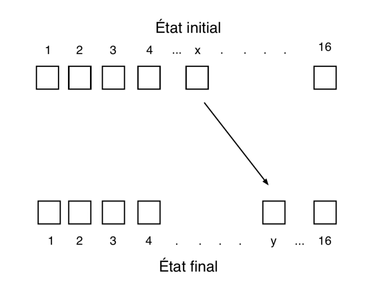


Qu'est-ce qu'une étape ?

Étape = **mélange des blocs**

État initial et état final

Chaque bloc est envoyé à un certain endroit.

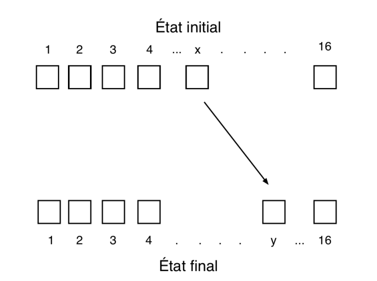


Qu'est-ce qu'une étape ?

Étape = **mélange des blocs**

État initial et état final

Chaque bloc est envoyé à un certain endroit.



Il **suffit** de décrire où est envoyé le bloc à l'emplacement x, pour tout x.

Définition (fonction)

Une *fonction* f de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même

Définition (fonction)

Une *fonction* f de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même est la donnée, pour chaque $x \in \{1, \ldots, n\}$, d'exactement un $f(x) \in \{1, \ldots, n\}$.

Définition (fonction)

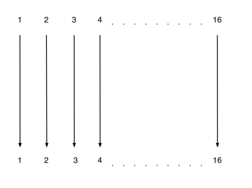
Une *fonction* f de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même est la donnée, pour chaque $x \in \{1, \ldots, n\}$, d'exactement un $f(x) \in \{1, \ldots, n\}$.

(ici, $n = 16$)

Exemples de fonctions :

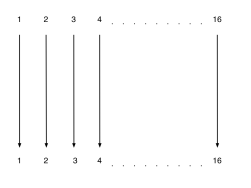
Exemples de fonctions :

La fonction *identité*, qui à un nombre x associe lui-même :

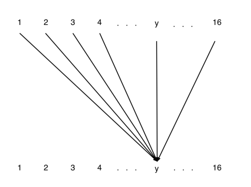


Exemples de fonctions :

La fonction *identité*, qui à un nombre x associe lui-même :

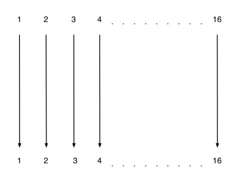


La fonction *constante* égale à y, qui à tout x associe le même y :

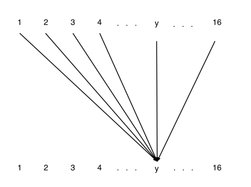


Exemples de fonctions :

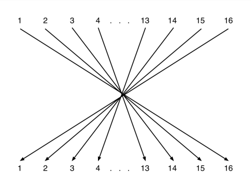
La fonction *identité*, qui à un nombre x associe lui-même :

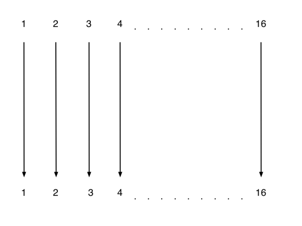


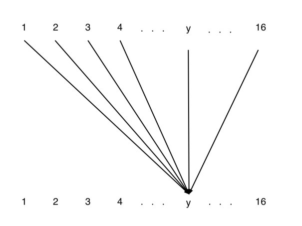
La fonction *constante* égale à y, qui à tout x associe le même y :

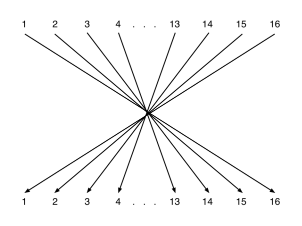


La fonction qui renverse l'ordre :

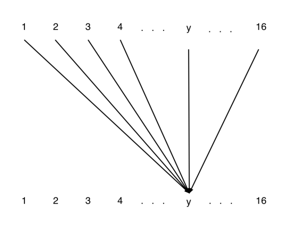








Exercice : quelle fonction ne correspond pas à un mélange des blocs ?

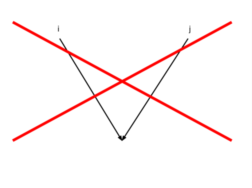


Exercice : quelle fonction ne correspond pas à un mélange des blocs ? *Réponse : les fonctions constantes ne correspondent pas à un mélange des blocs.*

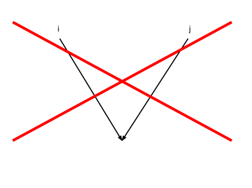
La fonction f associée à un mélange des blocs
doit vérifier la propriété :

La fonction f associée à un mélange des blocs doit vérifier la propriété :

Deux éléments ne peuvent pas être envoyés au même endroit.



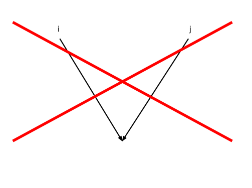
La fonction f associée à un mélange des blocs doit vérifier la propriété :
Deux éléments ne peuvent pas être envoyés au même endroit.



Définition (permutation)

Une fonction f de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même est une *permutation* si,

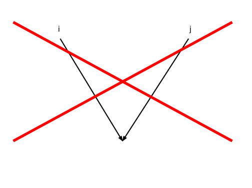
La fonction f associée à un mélange des blocs doit vérifier la propriété :
Deux éléments ne peuvent pas être envoyés au même endroit.



Définition (permutation)

Une fonction f de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même est une *permutation* si, quand $i \neq j$, $f(i) \neq f(j)$.

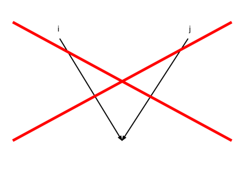
La fonction f associée à un mélange des blocs doit vérifier la propriété :
Deux éléments ne peuvent pas être envoyés au même endroit.



Définition (permutation)

Une fonction f de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même est une *permutation* si, quand $i \neq j$, $f(i) \neq f(j)$. On note les permutations avec des lettres grecques comme σ (sigma) ou τ (tau).

La fonction f associée à un mélange des blocs doit vérifier la propriété :
Deux éléments ne peuvent pas être envoyés au même endroit.



Définition (permutation)

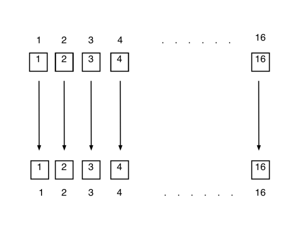
Une fonction f de $\{1, ..., n\}$ dans lui-même est une *permutation* si, quand $i \neq j$, $f(i) \neq f(j)$. On note les permutations avec des lettres grecques comme σ (sigma) ou τ (tau).

Les permutations peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes divers (problèmes de tri, Rubik's cube...)

Exemples de permutations et non-permutations :

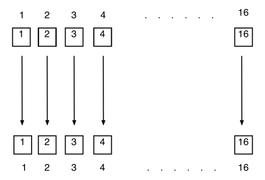
Exemples de permutations et non-permutations :

La fonction identité est une permutation :

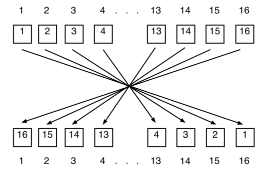


Exemples de permutations et non-permutations :

La fonction identité est une permutation :

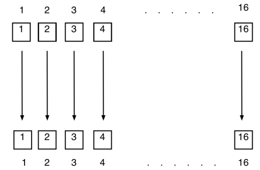


La fonction qui renverse l'ordre est une permutation :

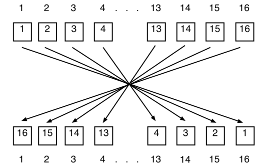


Exemples de permutations et non-permutations :

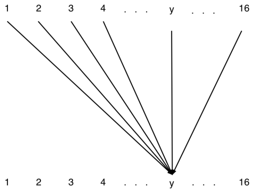
La fonction identité est une permutation :



La fonction qui renverse l'ordre est une permutation :



La fonction constante égale à y n'est pas une permutation :



Étape autorisée $=$ échange de deux éléments.

Étape autorisée = échange de deux éléments.

Type particulier de permutation :

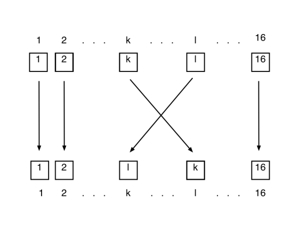
Étape autorisée = échange de deux éléments.

Type particulier de permutation :

Définition (transposition)

Si $k, l \in \{1, n\}$, la *transposition* $(k\ l)$ est la permutation σ définie par :

- $\sigma(k) = l$,



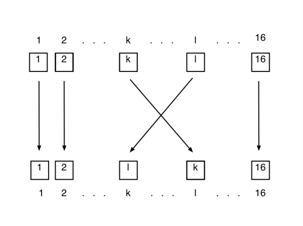
Étape autorisée = échange de deux éléments.

Type particulier de permutation :

Définition (transposition)

Si $k, l \in \{1, n\}$, la *transposition* $(k\ l)$ est la permutation σ définie par :

- $\sigma(k) = l$,
- $\sigma(l) = k$,



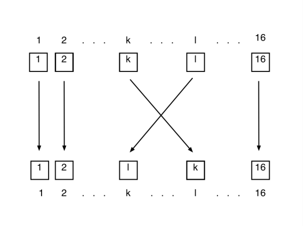
Étape autorisée = échange de deux éléments.

Type particulier de permutation :

Définition (transposition)

Si $k, l \in \{1, n\}$, la *transposition* $(k\ l)$ est la permutation σ définie par :

- $\sigma(k) = l$,
- $\sigma(l) = k$,
- $\sigma(i) = i$ pour tout $i \neq k, l$.



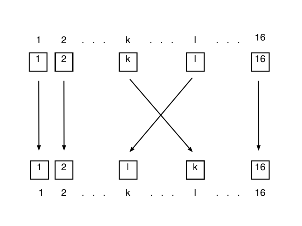
Étape autorisée = échange de deux éléments.

Type particulier de permutation :

Définition (transposition)

Si $k, l \in \{1, n\}$, la *transposition* $(k\ l)$ est la permutation σ définie par :

- $\sigma(k) = l$,
- $\sigma(l) = k$,
- $\sigma(i) = i$ pour tout $i \neq k, l$.



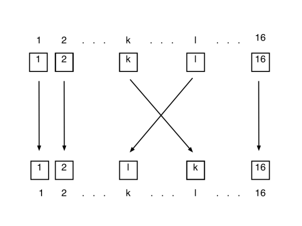
Étape autorisée = échange de deux éléments.

Type particulier de permutation :

Définition (transposition)

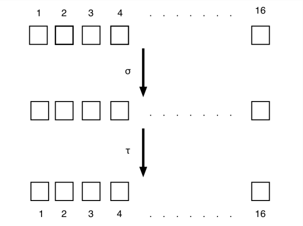
Si $k, l \in \{1, n\}$, la *transposition* $(k\ l)$ est la permutation σ définie par :

- $\sigma(k) = l$,
- $\sigma(l) = k$,
- $\sigma(i) = i$ pour tout $i \neq k, l$.



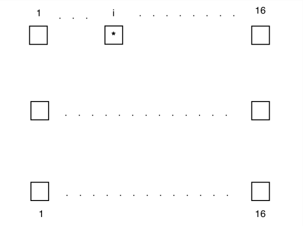
Attention au vocabulaire : permutation/transposition.

L'exécution de plusieurs étapes dans l'ordre est aussi un mélange des blocs.

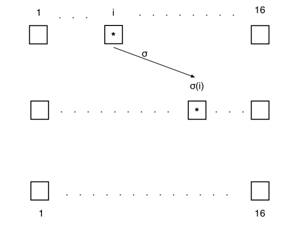


L'exécution de plusieurs étapes dans l'ordre est aussi un mélange des blocs.

Bloc $*$ en position i



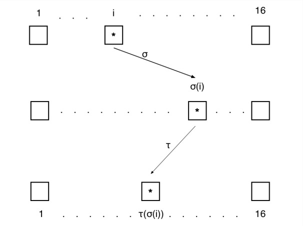
L'exécution de plusieurs étapes dans l'ordre est aussi un mélange des blocs.



Bloc $*$ en position i

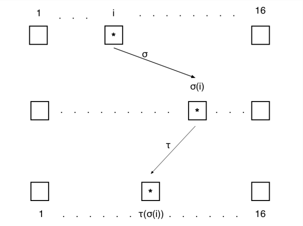
Après σ, position $\sigma(i)$

L'exécution de plusieurs étapes dans l'ordre est aussi un mélange des blocs.



Bloc $*$ en position i
Après σ, position $\sigma(i)$
Après τ, position $\tau(\sigma(i))$.

L'exécution de plusieurs étapes dans l'ordre est aussi un mélange des blocs.



Bloc $*$ en position i

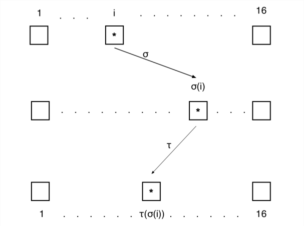
Après σ, position $\sigma(i)$

Après τ, position $\tau(\sigma(i))$.

Définition (composition)

Soit $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ k permutations.

L'exécution de plusieurs étapes dans l'ordre est aussi un mélange des blocs.



Bloc $*$ en position i

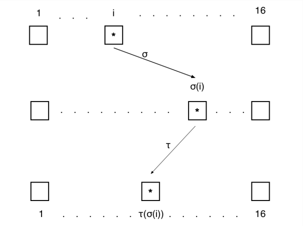
Après σ, position $\sigma(i)$

Après τ, position $\tau(\sigma(i))$.

Définition (composition)

Soit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ k permutations. On appelle *composition* de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k$, et on note $\sigma_1.\sigma_2. \ldots .\sigma_k$,

L'exécution de plusieurs étapes dans l'ordre est aussi un mélange des blocs.



Bloc $*$ en position i

Après σ, position $\sigma(i)$

Après τ, position $\tau(\sigma(i))$.

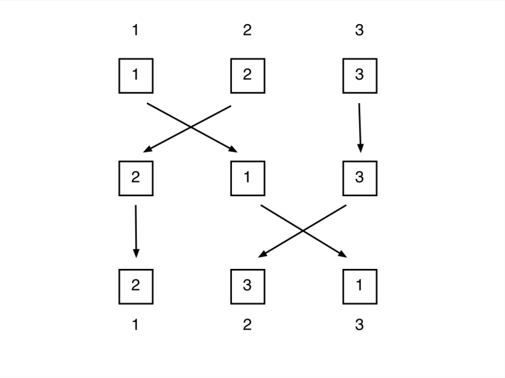
Définition (composition)

Soit $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ k permutations. On appelle *composition* de $\sigma_1, \sigma_2, ...\sigma_k$, et on note $\sigma_1.\sigma_2.\ ...\ .\sigma_k$, la permutation σ définie par $\sigma(i) = \sigma_k(\sigma_{k-1}(\ ...\ (\sigma_1(i))\ ...\ ))$.

Attention à l'ordre des termes !

Attention à l'ordre des termes !

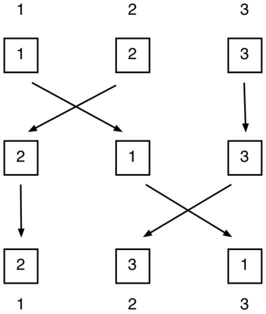
Exemple :



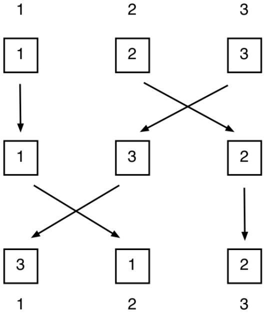
$(1\ 2).(2\ 3)$

Attention à l'ordre des termes !

Exemple :



(1 2).(2 3)



(2 3).(1 2)

Revenons à notre problème :

Problème simplifié

On a 16 éléments. À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents. Peut-on échanger 14 et 15 en un nombre pair d'étapes ?

Revenons à notre problème :

Problème simplifié

On a 16 éléments. ***À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents.*** *Peut-on échanger 14 et 15 en un nombre pair d'étapes ?*

Étape autorisée = transposition.

Revenons à notre problème :

Problème simplifié

On a 16 éléments. À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents. Peut-on échanger 14 et 15 en un nombre pair d'étapes ?

Étape autorisée = transposition.

Résultat de l'exécution des étapes = composition des transpositions.

Revenons à notre problème :

Problème simplifié

On a 16 éléments. À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents. Peut-on ***échanger 14 et 15*** *en un nombre pair d'étapes ?*

Étape autorisée = transposition.
Résultat de l'exécution des étapes = composition des transpositions.
Échange des blocs 14 et 15 = transposition $(14\ 15)$.

Revenons à notre problème :

Problème simplifié

On a 16 éléments. À chaque étape, on peut échanger la position de deux éléments différents. Peut-on échanger 14 et 15 en un nombre pair d'étapes ?

Étape autorisée = transposition.
Résultat de l'exécution des étapes = composition des transpositions.
Échange des blocs 14 et 15 = transposition $(14\ 15)$.
Le problème se reformule donc ainsi :

Problème reformulé

La transposition $(14\ 15)$ peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Problème reformulé

La transposition (14 15) peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Problème simplifié $\longrightarrow$ tous les blocs sont identiques.

Problème reformulé

La transposition (14 15) peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Problème simplifié $\longrightarrow$ tous les blocs sont identiques. Problème que nous allons résoudre :

Version finale du problème

Une transposition peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Sommaire

Version finale du problème

Une transposition peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Version finale du problème

Une transposition peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Idée :

- Diviser l'ensemble des permutations en deux parties : les permutations *paires* et *impaires*,

Version finale du problème

Une transposition peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Idée :

- Diviser l'ensemble des permutations en deux parties : les permutations *paires* et *impaires*,
- Montrer :

Version finale du problème

Une transposition peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Idée :

- Diviser l'ensemble des permutations en deux parties : les permutations *paires* et *impaires*,
- Montrer :
  - Transposition = impaire

Version finale du problème

Une transposition peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Idée :

- Diviser l'ensemble des permutations en deux parties : les permutations *paires* et *impaires*,
- Montrer :
  - Transposition = impaire
  - Composition d'un nb pair de transpositions = paire.

Version finale du problème

Une transposition peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Idée :

- Diviser l'ensemble des permutations en deux parties : les permutations *paires* et *impaires*,
- Montrer :
  - Transposition = impaire
  - Composition d'un nb pair de transpositions = paire.
  - Pair & impair impossible

Version finale du problème

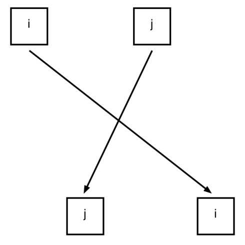
Une transposition peut-elle s'écrire comme composition d'un nombre pair de transpositions ?

Idée :

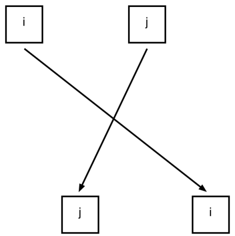
- Diviser l'ensemble des permutations en deux parties : les permutations *paires* et *impaires*,
- Montrer :
  - Transposition = impaire
  - Composition d'un nb pair de transpositions = paire.
  - Pair & impair impossible

$\Longrightarrow$ Transposition & composition d'un nb pair de transpositions impossible.

Combien de fois un élément peut-t-il « passer de l'autre côté » d'un autre en appliquant la permutation ?

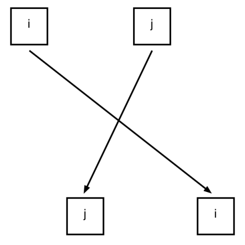


Combien de fois un élément peut-t-il « passer de l'autre côté » d'un autre en appliquant la permutation ?



Définition (inversion)

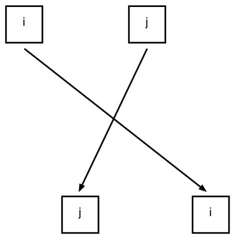
Combien de fois un élément peut-t-il « passer de l'autre côté » d'un autre en appliquant la permutation ?



Définition (inversion)

Soit σ une permutation. Deux numéros d'emplacements $i < j$ sont *inversés* si $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Combien de fois un élément peut-t-il « passer de l'autre côté » d'un autre en appliquant la permutation ?



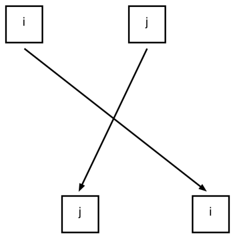
Définition (inversion)

Soit σ une permutation. Deux numéros d'emplacements $i < j$ sont *inversés* si $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Définition (nombre d'inversions)

Le *nombre d'inversions* de σ

Combien de fois un élément peut-t-il « passer de l'autre côté » d'un autre en appliquant la permutation ?



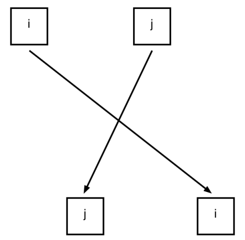
Définition (inversion)

Soit σ une permutation. Deux numéros d'emplacements $i < j$ sont *inversés* si $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Définition (nombre d'inversions)

Le *nombre d'inversions* de σ est le nombre de couples $\{i, j\}$ avec $i < j$ inversés.

Combien de fois un élément peut-t-il « passer de l'autre côté » d'un autre en appliquant la permutation ?



Définition (inversion)

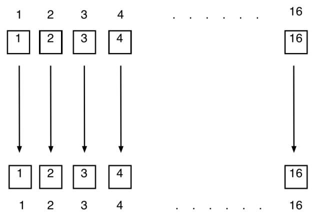
Soit σ une permutation. Deux numéros d'emplacements $i < j$ sont *inversés* si $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Définition (nombre d'inversions)

Le *nombre d'inversions* de σ est le nombre de couples $\{i, j\}$ avec $i < j$ inversés. On dit que σ est *paire* (resp. *impaire*) si son nombre d'inversions l'est.

Exemples :

Exemples :

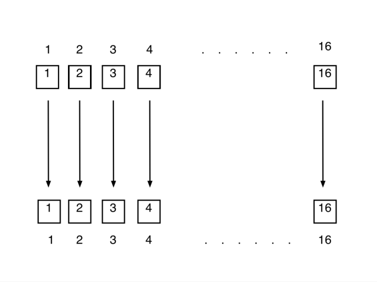


La permutation identité a 0 inversion

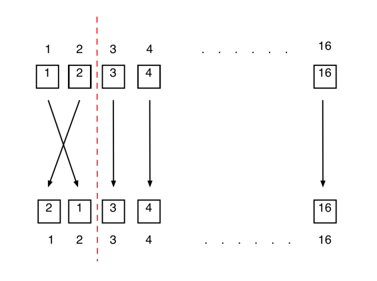
$\longrightarrow$ *paire*.

Exemples :

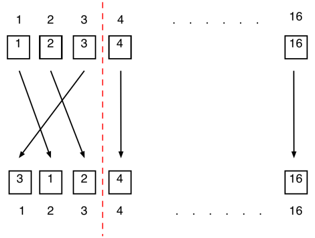
La permutation identité a 0 inversion $\longrightarrow$ *paire*.



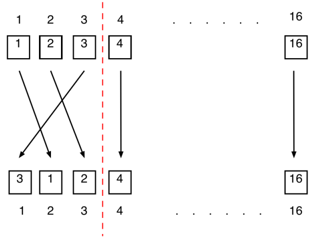
La transposition (1 2) a 1 inversion $\longrightarrow$ *impaire*.



Exercice : nombre d'inversions de la permutation qui envoie 1 sur 2, 2 sur 3, 3 sur 1, et ne fait rien sur les autres éléments ?



Exercice : nombre d'inversions de la permutation qui envoie 1 sur 2, 2 sur 3, 3 sur 1, et ne fait rien sur les autres éléments ?



Réponse : 2, et la permutation est paire

Parité d'une transposition générale ?

Parité d'une transposition générale ?

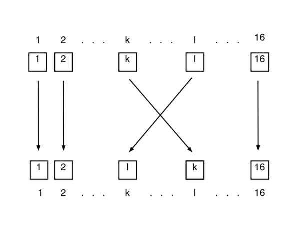
Théorème

Les transpositions sont impaires.

Preuve :

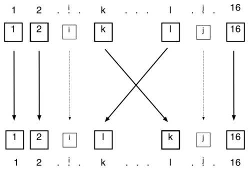
Preuve :

Soit $(k\ l)$ une transposition, $k < l$. On va compter les inversions $\{i, j\}$, $i < j$.



Preuve :

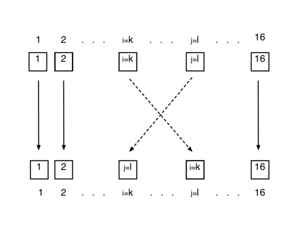
Soit $(k\ l)$ une transposition, $k < l$. On va compter les inversions $\{i, j\}$, $i < j$.



Cas 1 : $k \notin \{i, j\}, l \notin \{i, j\}$, $\longrightarrow$ pas inversion.

Preuve :

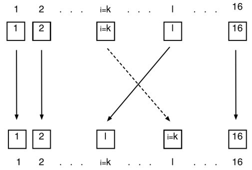
Soit $(k\ l)$ une transposition, $k < l$. On va compter les inversions $\{i, j\}$, $i < j$.



Cas 1 : $k \notin \{i, j\}, l \notin \{i, j\}$, $\longrightarrow$ pas inversion.

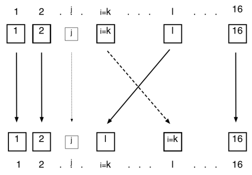
Cas 2 : $k \in \{i, j\}, l \in \{i, j\}$, alors $i = k$, $j = l \longrightarrow$ **1 inversion**.

Cas 3 : $k \in \{i, j\}, l \notin \{i, j\}$. OPS $k = i$.



Cas 3 : $k \in \{i, j\}, l \notin \{i, j\}$. OPS $k = i$.

Cas 3.1 : $j < k \longrightarrow$ pas inversion.

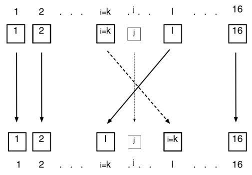


Cas 3 : $k \in \{i, j\}, l \notin \{i, j\}$. OPS $k = i$.

Cas 3.1 : $j < k \longrightarrow$ pas inversion.

Cas 3.2 : $k < j < l \longrightarrow$ inversion.

1 inversion pour chaque j.



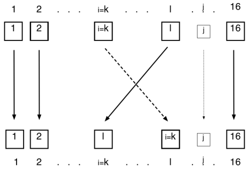
Cas 3 : $k \in \{i, j\}, l \notin \{i, j\}$. OPS $k = i$.

Cas 3.1 : $j < k \longrightarrow$ pas inversion.

Cas 3.2 : $k < j < l \longrightarrow$ inversion.

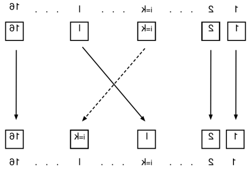
1 inversion pour chaque j.

Cas 3.3 : $l < j \longrightarrow$ pas inversion.



Cas 3 : $k \in \{i, j\}, l \notin \{i, j\}$. OPS $k = i$.

Cas 3.1 : $j < k \longrightarrow$ pas inversion.



Cas 3.2 : $k < j < l \longrightarrow$ inversion.
1 inversion pour chaque j.

Cas 3.3 : $l < j \longrightarrow$ pas inversion.

Cas 4 : $k \notin \{i, j\}, l \in \{i, j\}$: comme Cas 3 $\longrightarrow$ **1 inversion pour chaque** $k < j < l$**.**

Cas 3 : $k \in \{i, j\}, l \notin \{i, j\}$. OPS $k = i$.

Cas 3.1 : $j < k \longrightarrow$ pas inversion.

Cas 3.2 : $k < j < l \longrightarrow$ inversion.
1 inversion pour chaque j.

Cas 3.3 : $l < j \longrightarrow$ pas inversion.

Cas 4 : $k \notin \{i, j\}, l \in \{i, j\}$: comme Cas 3 $\longrightarrow$ **1 inversion pour chaque** $k < j < l$**.**

Total : 1 inversion entre k et l
$+$ 2 inversions pour chaque $k < j < l$
$=$ **nombre impair**.

Cas 3 : $k \in \{i, j\}, l \notin \{i, j\}$. OPS $k = i$.

Cas 3.1 : $j < k \longrightarrow$ pas inversion.

Cas 3.2 : $k < j < l \longrightarrow$ inversion.
1 inversion pour chaque j**.**

Cas 3.3 : $l < j \longrightarrow$ pas inversion.

Cas 4 : $k \notin \{i, j\}, l \in \{i, j\}$: comme Cas 3 $\longrightarrow$ **1 inversion pour chaque** $k < j < l$**.**

<u>Total</u> : 1 inversion entre k et l
$+$ 2 inversions pour chaque $k < j < l$
$=$ **nombre impair**.

La transposition $(k \ l)$ est donc impaire. *C.Q.F.D.*

On veut : composition d'un nb pair de transpositions $=$ paire.

On veut : composition d'un nb pair de transpositions = paire.

On montre que (transposition).σ a la parité opposée de σ :

On veut : composition d'un nb pair de transpositions = paire.

On montre que (transposition).σ a la parité opposée de σ :

Identité = paire

On veut : composition d'un nb pair de transpositions = paire.

On montre que (transposition).σ a la parité opposée de σ :

Identité = paire

Transposition = impaire

On veut : composition d'un nb pair de transpositions = paire.

On montre que (transposition).σ a la parité opposée de σ :

Identité = paire
Transposition = impaire
(transposition) . (transposition) = paire

On veut : composition d'un nb pair de transpositions = paire.

On montre que (transposition).σ a la parité opposée de σ :

Identité = paire

Transposition = impaire

(transposition) . (transposition) = paire

(transposition) . (transposition) . (transposition) = impaire

On veut : composition d'un nb pair de transpositions = paire.

On montre que (transposition).σ a la parité opposée de σ :

Identité = paire

Transposition = impaire

(transposition) . (transposition) = paire

(transposition) . (transposition) . (transposition) = impaire

...

$\longrightarrow$ composition de k transpositions a la parité de k.

Théorème

Si σ est une permutation et $(k\ l)$, $k < l$ est une transposition, alors $(k\ l).\sigma$ a la parité opposée de celle de σ.

Théorème

Si σ est une permutation et $(k\ l)$, $k < l$ est une transposition, alors $(k\ l).\sigma$ a la parité opposée de celle de σ.

Preuve : Admis (pas de nouvelles idées, et pénible)

Récapitulons :

Récapitulons :

Argument du damier : Problème impossible pour nb impair d'étapes

Récapitulons :

Argument du damier : Problème impossible pour nb impair d'étapes

Impossibilité du problème $\Longleftarrow$ impossibilité du problème pour nb pair d'étapes

Récapitulons :

Argument du damier : Problème impossible pour nb impair d'étapes

Impossibilité du problème $\Longleftarrow$ impossibilité du problème pour nb pair d'étapes

Impossibilité du problème pour nb pair d'étapes $\Longleftarrow$ impossibilité du problème simplifié

Récapitulons :

Argument du damier : Problème impossible pour nb impair d'étapes

Impossibilité du problème $\Longleftarrow$ impossibilité du problème pour nb pair d'étapes

Impossibilité du problème pour nb pair d'étapes $\Longleftarrow$ impossibilité du problème simplifié

Notion de permutation, impossibilité du problème simplifié $\Longleftrightarrow$ impossibilité du problème reformulé

Récapitulons :

Argument du damier : Problème impossible pour nb impair d'étapes

Impossibilité du problème $\Longleftarrow$ impossibilité du problème pour nb pair d'étapes

Impossibilité du problème pour nb pair d'étapes $\Longleftarrow$ impossibilité du problème simplifié

Notion de permutation, impossibilité du problème simplifié $\Longleftrightarrow$ impossibilité du problème reformulé

Notion de parité, impossibilité du problème reformulé $\Longleftarrow$ théorème

Récapitulons :

Argument du damier : Problème impossible pour nb impair d'étapes

Impossibilité du problème $\Longleftarrow$ impossibilité du problème pour nb pair d'étapes

Impossibilité du problème pour nb pair d'étapes $\Longleftarrow$ impossibilité du problème simplifié

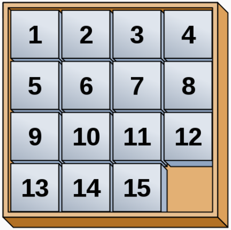
Notion de permutation, impossibilité du problème simplifié $\Longleftrightarrow$ impossibilité du problème reformulé

Notion de parité, impossibilité du problème reformulé $\Longleftarrow$ théorème

LE PROBLÈME DU TAQUIN EST DONC IMPOSSIBLE À RÉSOUDRE.

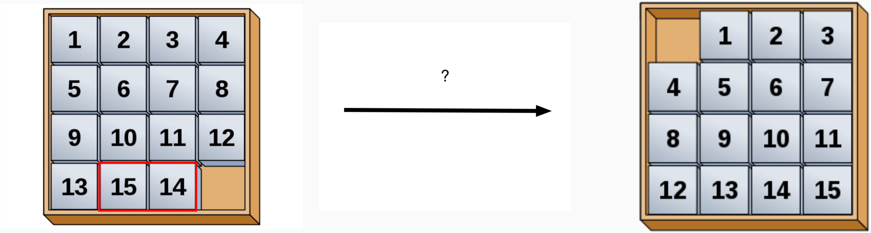
Mais que signifie vraiment « résoudre le Taquin » ?

Mais que signifie vraiment « résoudre le Taquin » ?

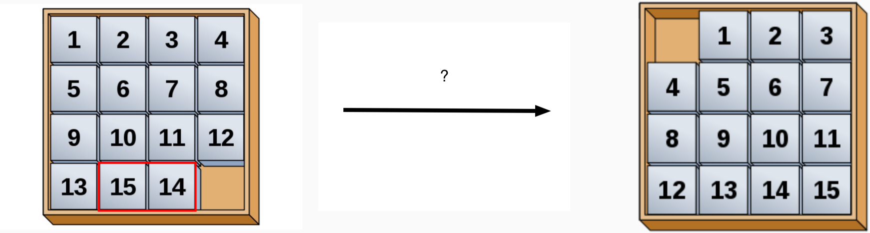


Mais que signifie vraiment « résoudre le Taquin » ?

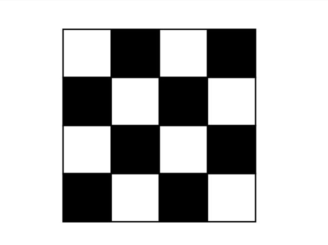
Problème 2 :



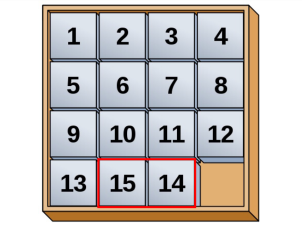
Problème 2 :

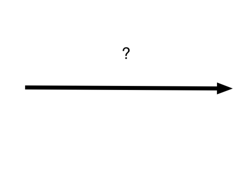


Argument du damier :

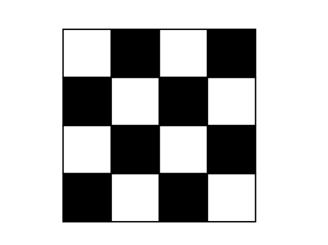


Problème 2 :





Argument du damier :



Formalisme des permutations ?

Formalisme des permutations ?

Résultat final : « inverser 14 et 15 pour les remettre dans l'ordre, puis mettre la case vide en haut à gauche sans changer l'ordre des autres cases ».

Formalisme des permutations ?

Résultat final : « inverser 14 et 15 pour les remettre dans l'ordre, **puis** mettre la case vide en haut à gauche sans changer l'ordre des autres cases ».

- « ... *puis* ... » $\longrightarrow$ *composition*

Formalisme des permutations ?

Résultat final : « **inverser 14 et 15 pour les remettre dans l'ordre**, puis mettre la case vide en haut à gauche sans changer l'ordre des autres cases ».

- « ... *puis* ... » $\longrightarrow$ *composition*
- « inverser 14 et 15 » $\longrightarrow$ *transposition* $(14\ 15)$

Formalisme des permutations ?

Résultat final : « inverser 14 et 15 pour les remettre dans l'ordre, puis **mettre la case vide en haut à gauche sans changer l'ordre des autres cases** ».

- « ... *puis* ... » $\longrightarrow$ *composition*
- « inverser 14 et 15 » $\longrightarrow$ *transposition* (14 15)
- « mettre la case vide en haut à gauche sans changer l'ordre des autres cases » = « déplacer tous les éléments d'un cran en avant, sauf la case vide qui revient tout au début » = σ.

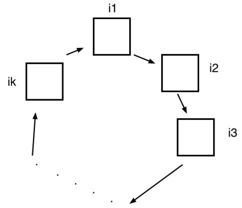
Formalisme des permutations ?

Résultat final : « inverser 14 et 15 pour les remettre dans l'ordre, puis mettre la case vide en haut à gauche sans changer l'ordre des autres cases ».

- « ... *puis* ... » $\longrightarrow$ *composition*
- « inverser 14 et 15 » $\longrightarrow$ *transposition* (14 15)
- « mettre la case vide en haut à gauche sans changer l'ordre des autres cases » $=$ « déplacer tous les éléments d'un cran en avant, sauf la case vide qui revient tout au début » $= \sigma$.

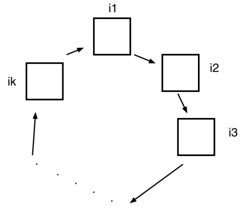
Le résultat final est (14 15).σ. Notion de *cycle* :

Définition (cycle)



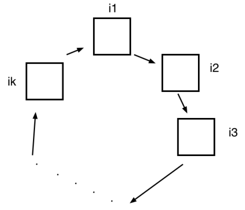
Définition (cycle)

Soit $i_1, \ldots, i_k$ k éléments de $\{1, \ldots, n\}$ distincts.



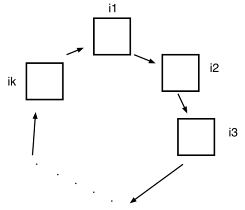
Définition (cycle)

Soit $i_1, \ldots, i_k$ k éléments de $\{1, \ldots, n\}$ distincts. Le k-cycle $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ est la permutation qui envoie i_1 sur i_2, i_2 sur i_3, $\ldots$ i_{k-1} sur i_k, i_k sur i_1 et les autres éléments sont inchangés.



Définition (cycle)

Soit $i_1, \dots, i_k$ k éléments de $\{1, \dots, n\}$ distincts. Le k-cycle $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ est la permutation qui envoie i_1 sur i_2, i_2 sur i_3, ... i_{k-1} sur i_k, i_k sur i_1 et les autres éléments sont inchangés.



Exemple : 2-cycle = transposition.

$\sigma = (1\ 2\ 3\ \ldots\ 16).$

$\sigma = (1\ 2\ 3\ ...\ 16)$.
Le résultat final d'une solution au nouveau problème est donc
$(14\ 15).\sigma$

$\sigma = (1\ 2\ 3\ ...\ 16)$.

Le résultat final d'une solution au nouveau problème est donc $(14\ 15).\sigma = (14\ 15).(1\ 2\ 3\ \ldots\ 16)$.

$\sigma = (1\ 2\ 3\ ...\ 16)$.
Le résultat final d'une solution au nouveau problème est donc $(14\ 15).\sigma = (14\ 15).(1\ 2\ 3\ \ldots\ 16)$.

Cette permutation = composition d'un nombre pair de transpositions ?

$\sigma = (1\ 2\ 3\ ...\ 16)$.
Le résultat final d'une solution au nouveau problème est donc
$(14\ 15).\sigma = (14\ 15).(1\ 2\ 3\ \ldots\ 16)$.

Cette permutation = composition d'un nombre pair de transpositions ? On calcule sa parité.

Théorème

Un k-cycle a la parité de $k - 1$.

Théorème

Un k-cycle a la parité de $k - 1$.

$(1\ 2\ 3\ \ldots\ 16)$ est donc impaire et le résultat final est pair.

Théorème

Un k-cycle a la parité de $k - 1$.

$(1\ 2\ 3\ \ldots\ 16)$ est donc impaire et le résultat final est pair.
Cela ne permet pas de conclure, mais c'est un indice que le problème alternatif peut être résolu.

Conclusion/Ouverture

Conclusion

Conclusion

1. Étude des déplacements de la case vide $\longrightarrow$ moitié du problème.

Conclusion

1. Étude des déplacements de la case vide $\longrightarrow$ moitié du problème. Introduction d'une version simplifiée du problème pour l'autre moitié.

Conclusion

1. Étude des déplacements de la case vide $\longrightarrow$ moitié du problème. Introduction d'une version simplifiée du problème pour l'autre moitié.

2. Les notions intervenant dans le problème s'écrivent bien en termes mathématiques.

Conclusion

1. Étude des déplacements de la case vide $\longrightarrow$ moitié du problème. Introduction d'une version simplifiée du problème pour l'autre moitié.

2. Les notions intervenant dans le problème s'écrivent bien en termes mathématiques.

3. Utilisation du nouveau vocabulaire pour montrer l'impossibilité du nouveau problème, et donc du problème de départ.

Conclusion

1. Étude des déplacements de la case vide $\longrightarrow$ moitié du problème. Introduction d'une version simplifiée du problème pour l'autre moitié.

2. Les notions intervenant dans le problème s'écrivent bien en termes mathématiques.

3. Utilisation du nouveau vocabulaire pour montrer l'impossibilité du nouveau problème, et donc du problème de départ.

4. Variante du problème initial $\longrightarrow$ généralisation des notions mathématiques.

Ouverture

Permutations et composition similaires à nombres réels et multiplication

Ouverture

Permutations et composition similaires à nombres réels et multiplication $\longrightarrow$ notion *algébrique*

Ouverture

Permutations et composition similaires à nombres réels et multiplication $\longrightarrow$ notion *algébrique*

Algèbre $=$ étudier les propriétés vérifiées par les opérations usuelles, puis transporter ces opérations sur d'autres ensembles.

Ouverture

Permutations et composition similaires à nombres réels et multiplication $\longrightarrow$ notion *algébrique*

Algèbre $=$ étudier les propriétés vérifiées par les opérations usuelles, puis transporter ces opérations sur d'autres ensembles.

$\longrightarrow$ Topologie algébrique, Géométrie algébrique, Théorie algébrique des nombres...