

**Test 1 – 6 Décembre 2024 (Saint-Nicolas !)****A lire attentivement :**

- Documents, calculatrice non autorisés.
- Téléphones rangés dans les sacs.
- Justifier les résultats de façon concise.

1. Soit un vecteur  $(X, Y)$  à densité, de densité sur  $\mathbb{R}^2$  donnée par

$$C1_{|x|+|y|\leq 1}$$

- (a) Calculer <sup>1</sup>  $C$  pour que l'expression précédente définisse une densité.
  - (b) Dessiner l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$  puis représenter sur le même dessin le support de la loi de  $(X, Y)$ .
  - (c) Quelle est la loi marginale de  $X$  ? de  $Y$  ?
  - (d) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
  - (e) Calculer  $\mathbb{E}[XY]$ .
2. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi respective  $\text{Exp}(a)$  et  $\text{Exp}(b)$  pour  $a, b > 0$ .
- (a) Calculer la densité de  $X + Y$ . On distinguera les cas  $a \neq b$  et  $a = b$ .
  - (b) Donner dans chaque cas un équivalent de la densité de  $X + Y$  en  $+\infty$ .

---

1. on pourra faire les calculs dans cet exercice en s'aidant de raisonnements géométriques