Feuille d'exercices n° 6 : Variables aléatoires indépendantes

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{\mathbb{R}^2} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu y} \mathbf{1}_{\{0<x<y\}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
2. $\int_{\mathbb{R}^2} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu y} \mathbf{1}_{\{x+y\leq t\}} \mathbf{1}_{\{0<x,y\}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
3. $\int_{\mathbb{R}^2} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu y} \mathbf{1}_{\{x<t<x+y\}} \mathbf{1}_{\{0<x,y\}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Dans 2 et 3, on distinguera trois cas en fonction de λ et μ et on donnera un équivalent pour 3 lorsque $t \to \infty$.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes[1] :

1. $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x+y\leq t\}} \mathbf{1}_{\{0<x<1,0<y<1\}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
2. $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x-y\leq t\}} \mathbf{1}_{\{0<x<1,0<y<1\}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
3. $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{xy\leq t\}} \mathbf{1}_{\{0<x<1,0<y<1\}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
4. $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x/y\leq t\}} \mathbf{1}_{\{0<x<1,0<y<1\}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Exercice 3. Soit X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes distribuées selon la loi de Rademacher : $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = 1/2$. On pose

$$Y_1 = X_2 X_3,\ Y_2 = X_1 X_3,\ Y_3 = X_1 X_2.$$

1. Soit $i \neq j$. Montrer que les variables Y_i et Y_j sont indépendantes. (On dit alors que les variables Y_1, Y_2, Y_3 sont deux à deux indépendantes).
2. Les variables Y_1, Y_2, Y_3 sont-elles indépendantes ? On pourra calculer $\mathbb{P}(Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1)$.

Exercice 4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-x-2y} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x) \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

1. Calculer les lois marginales de X et de Y. En déduire que les variables X et Y sont indépendantes.
2. Calculer $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exercice 5. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24\,xy & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x+y \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

1. on pourra proposer/s'aider d'une interprétation géométrique

Exercice 6. Soit U et V deux variables uniformes indépendantes sur $[0,1]$. On coupe un bâton, assimilé au segment $[0,1]$ en 3 bouts selon les points de découpe U et V. On note A, B et C les longueurs des 3 bouts (pris de gauche à droite).

1. Exprimer A en fonction de U et de V. En déduire, pour $x \in [0,1]$, $\mathbb{P}(A > x)$ puis la fonction de répartition de A et enfin, si cela a un sens, sa densité.
2. De même, trouver la loi de C.
3. Quelle est la loi de B ? On pourra commencer par chercher $\Delta_x \subset [0,1]^2$ tel que $\{B \leq x\} = \{(U,V) \in \Delta_x\}$.
4. On peut former un triangle avec les 3 bouts si la longueur d'aucun des bouts n'excède la somme des deux autres. Quelle est la probabilité de pouvoir former un triangle ?

Exercice 7. Soit X, Y, Z trois variables i.i.d. de fonction de répartition commune F. On pose U, V, W le réarrangement croissant de X, Y, Z, c'est-à-dire les trois nombres tels que $U \leq V \leq W$ et $\{U, V, W\} = \{X, Y, Z\}$.

1. Quelle est la fonction de répartition de $W = \max\{X, Y, Z\}$?
2. Quelle est la fonction de répartition de $U = \min\{X, Y, Z\}$?
3. Quelle est la fonction de répartition de V ?

Exercice 8. Soit X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathrm{Unif}(0,1)$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq YZ)$.

Exercice 9. Soit X, Y indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction de répartition de $\frac{X}{Y}$ et en déduire une densité de cette variable aléatoire.
2. En déduire la fonction de répartition de $\frac{X}{X+Y}$ et faire le lien avec une loi connue.

Exercice 10. Soit X, Y et ε trois variables aléatoires indépendantes ; on suppose que $X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$ un réel, et ε est un signe aléatoire, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(\varepsilon = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$

1. Calculer la loi de εX à l'aide de :
   (a) la fonction de répartition
   (b) la méthode de la fonction muette
2. Calculer la loi de $X - Y$.

Exercice 11. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, avec $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Déterminer la loi de $Y = \min\{X_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}$, reconnaître cette loi.
2. Déterminer la loi de $Z = \max\{X_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}$, et calculer sa densité (si elle existe).

Exercice 12. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, avec $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Donner la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ en calculant sa fonction génératrice des moments.

Exercice 13. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et telles que $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, avec $\alpha_i, \beta > 0$.

1. Donner la loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$ en considérant sa fonction génératrice des moments.
2. En déduire la loi de $Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ où les Z_i sont des variables aléatoires indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 14. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Pareto de paramètre 2, i.e. qui possèdent la densité $p(x) = \frac{1_{\{x>1\}}}{x^2}$. On pose

$$(Z, W) = \left(\ln(X), 1 + \frac{\ln(Y)}{\ln(X)}\right)$$

1. Quelle est la loi de (Z, W) ? Les variables Z et W sont-elles indépendantes ?
2. Quelle est la loi de W ?
3. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 15. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer la loi de
$$(Z, W) = (X/Y, X + Y)$$
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 16. Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f et g.

1. Montrer qu'une densité de $Z = \frac{X}{Y}$ est donnée par
$$h(z) = \int_0^{+\infty} y\,(f(zy)g(y) + f(-zy)g(-y))\,\mathrm{d}y.$$
2. Application : déterminer la loi de Z dans le cas où X et Y sont indépendantes, de même loi la loi :
   (a) normale centrée réduite $\mathcal{N}_1(0, 1)$.
   (b) exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.