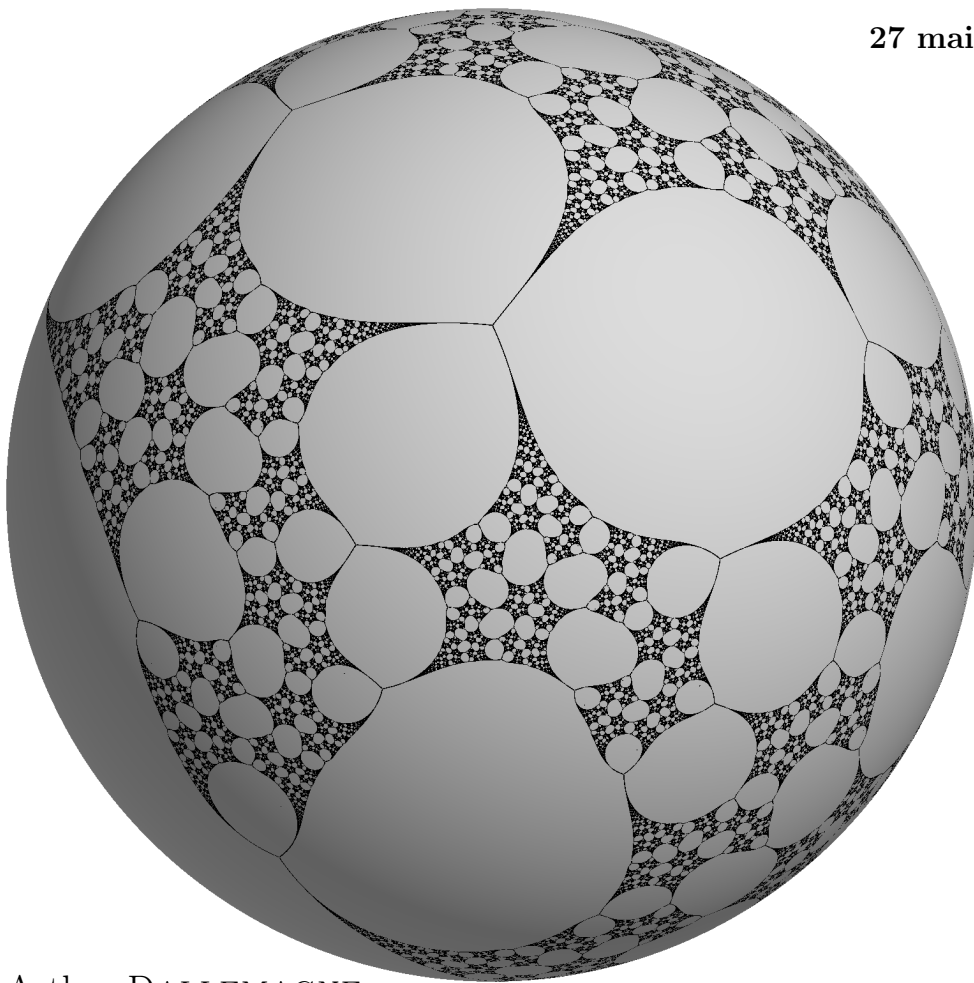

Dynamique holomorphe : du local au global

Magistère de Mathématiques d'Orsay
Travail Encadré de Recherche

27 mai 2022



Arthur DALLEMAGNE
Victor MAEGHT
Jean-Baptiste STIEGLER

Sous la supervision de
Thomas GAUTHIER

Résumé :

Nous nous intéressons ici à l'itération de fonctions holomorphes, un domaine connu sous le nom de *dynamique holomorphe*. Pour saisir le comportement de la suite des itérées $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de l'infini, nous réalisons le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{C} et obtenons alors $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la fameuse *sphère de Riemann*. Les seules fonctions holomorphes qui survivent sur cette surface sont les fractions rationnelles.

Ce système dynamique partitionne $\widehat{\mathbb{C}}$ en deux zones distinctes, nommées en l'honneur des pionniers du domaine : l'ensemble de Fatou (où la dynamique est stable) et l'ensemble de Julia (où la dynamique dépend fortement des conditions initiales). Les notions de stabilité et d'instabilité sont formalisées par la théorie des familles normales, développée par Paul Montel.

Cependant, comprendre la dynamique à une échelle globale n'est pas chose facile. Nous nous intéressons donc dans un premier temps à la dynamique locale autour de cycles (orbites périodiques) qui peuvent être de plusieurs types. Celle-ci s'appréhende souvent beaucoup mieux en choisissant un système de coordonnées locales plus adapté, qui exhibe une dynamique plus simple. Ce procédé s'appelle la *conjugaison analytique*, et permet de classifier les dynamiques locales de manière très concise.

Cette étude locale donne des informations globales sur la géométrie des ensembles de Julia et de Fatou. Par exemple, la classification des comportements au voisinage des cycles amène à la classification des composantes de l'ensemble de Fatou, et explique pourquoi les ensembles de Julia ont des allures si "fractales" en général.

Remerciements :

Nous remercions bien chaleureusement notre encadrant, M. Thomas Gauthier, pour la bienveillance et la pédagogie dont il a fait preuve. Tout d'abord en nous orientant vers ce joli sujet, puis à travers nos régulières rencontres où il a toujours su prendre le temps de répondre à nos questions. Enfin, pour les perspectives ouvertes par ses captivants exposés, qui nous inspirent et nous motivent à approfondir ces domaines dans les prochains cours que nous suivrons.

Nous remercions aussi M. Arnaud Cheritat pour les illustrations uniques en leur genre (celle de la couverture par exemple) qu'il a généreusement accepté de nous partager. Ces dernières sont extrêmement importantes pour avoir une intuition dans un sujet comme celui-ci. Par ailleurs, ses sites internet valent le détour, et encouragent par leur sympathie à s'engager plus encore dans la dynamique holomorphe.

Pour finir, nous remercions Cecilia D'Errico pour son soutien et ses conseils précieux, et Jean-Claude Stiegler pour sa chasse intrépide aux fautes de frappe et de français. Nous remercions d'avance la *Princeton University Press* de ne pas nous attaquer en justice pour l'usage des excellentes figures de [Mil.], ouvrage déjà largement disponible en ligne.

Table des matières

Introduction historique	1
I. Cadre de travail	2
I.1. La sphère de Riemann, ou comment dompter l'infini	2
I.2. Analyse sur $\hat{\mathbb{C}}$	4
I.3. Les familles normales	7
II. Dynamique sur la sphère de Riemann	10
II.1. Orbites et cycles	10
II.2. Dichotomie dynamique	12
II.3. Conjugaison analytique	17
III. Etude locale autour des points fixes	21
III.1. Koenigs : points fixes répulsifs et géométriquement attractifs	21
III.2. Böttcher et la super-attraction	24
III.3. Points paraboliques	25
III.4. Irrationnelle indifférence...	31
IV. Conséquences à l'échelle globale	34
IV.1. Densité des points périodiques répulsifs	34
IV.2. La jungle de Julia	37
IV.3. Structure de l'ensemble de Fatou	40
A. Annexe	42
A.1. Trombinoscope de la famille Julia	42
A.2. Annexe de calculs	45
Références	49

Introduction historique

La théorie des systèmes dynamiques permet d'étudier l'évolution d'un ensemble, qu'on appellera système, sous l'action d'une certaine loi. Cette évolution est suivie par un paramètre de temps qui peut être continu, comme pour le flot d'une équation différentielle, ou discret comme nous le verrons dans la suite. Cette théorie admet de nombreuses applications très concrètes, en voici deux exemples historiques :

- L'étude de la mécanique céleste par Poincaré à partir de la fin du XIX siècle (dynamique continue).
- L'approximation de racines d'un polynôme par la méthode de Newton (dynamique discrète) étudiée par le mathématicien allemand Ernst Schröder à partir des années 1870. *

Véritable pionnier du domaine, Schröder généralisa la méthode de Newton en itérant des fonctions holomorphes f arbitraires afin de résoudre certaines équations fonctionnelles ; cela marqua le début de la dynamique holomorphe. Le français Georges Koenigs s'appliqua à comprendre la dynamique locale autour d'orbites périodiques, et cette étude locale fut poursuivie par Leau et Böttcher. Cependant, le comportement global restait toujours incompris.

L'Académie des Sciences de Paris décida alors de décerner son *Grand Prix des Sciences Mathématiques* de 1918 à celui qui apporterait de nouveaux éclairages sur cette question. Les français Pierre Fatou et Gaston Julia déposèrent deux manuscrits très similaires, qui révolutionnèrent le domaine de la dynamique holomorphe. Ces derniers s'appuyèrent pour cela sur les développements récents de Paul Montel et sa théorie des *familles normales*. Fatou, personnage discret, préféra se retirer de la compétition et Julia, gueule-cassée de la Première Guerre mondiale et figure proéminente du patriotisme français, reçut le prix. Cependant, le style de Fatou était beaucoup plus moderne que celui de Julia et, bien qu'il ne fut pas reconnu de son vivant, c'est lui qui permit le plus d'avancées sur ces questions.

Le domaine tomba petit à petit dans l'oubli, jusqu'aux années 1980 avec les travaux de Douady, Sullivan, Milnor, Yoccoz, Thurston, ou encore le bien connu Mandelbrot. † Les progrès de l'informatique et la possibilité de simuler les dynamiques permirent de grandes avancées.

Ce champ de recherche est aujourd'hui très actif, et des ponts sont tendus avec d'autres domaines, comme la théorie algébrique des nombres. De nombreuses questions restent encore en suspens, et attendent d'être résolues...

Pour plus de détails historiques, on pourra consulter [Alex.] et le très complet [Aud.]. Pour une meilleure intuition visuelle, on pourra aussi regarder l'excellente vidéo "[Au-delà de l'ensemble de Mandelbrot, une introduction à la dynamique holomorphe](#)" de la chaîne Youtube *3Blue1Brown* (en anglais, avec sous-titres français disponibles).

*. La méthode de Newton est bien plus ancienne que ça. Certaines formes étaient même déjà connues des babyloniens.

†. Plusieurs de ces personnages ont reçu des prix pour leurs contributions dans ce domaine. Le dernier en date est Sullivan, lauréat du prix Abel 2022.

I. Cadre de travail

Dans cette partie, nous commençons par définir ce qu'est la sphère de Riemann et admirer la richesse de sa structure. Nous pouvons notamment y faire de l'analyse, et nous voyons que la notion d'holomorphie y est encore plus rigide que dans \mathbb{C} . Nous terminons en étudiant la théorie des familles normales, qui est la clef pour formaliser la dynamique holomorphe. Nous nous inspirons beaucoup du livre de Berteloot [Bert.], qu'on pourra lire pour plus de détails.

I.1. La sphère de Riemann, ou comment dompter l'infini

Comme dit dans l'introduction, certaines orbites partent (en module) vers l'infini. Rajoutons alors un point symbolique ∞ , et définissons l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; c'est la **sphère de Riemann**. Nous cherchons une topologie qui formalise la convergence vers l'infini (i.e. qui lui donne des voisinages), mais telle que la topologie induite sur \mathbb{C} reste celle que nous connaissons. Pour cela, considérons la topologie constituée des ouverts suivants :

- les ouverts \mathcal{U} de la topologie usuelle de \mathbb{C} ,
- $\{\infty\} \cup \mathbb{C} \setminus K$ où K est un compact de \mathbb{C} .*

L'espace topologique ainsi obtenu est appelé *compactifié d'Alexandrov* de \mathbb{C} . †

Propriété I.1.1. *Cette topologie rend la sphère de Riemann compacte.*

Démonstration. Il est facile de voir que cette espace est séparé : \mathbb{C} est séparé, et pour tout point $z \in \mathbb{C}$, on a $z \in B(0, |z| + 1)$ et $\infty \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}(0, |z| + 1)$.

Vérifions si la propriété de Borel-Lebesgue y est vraie. Soit $\widehat{\mathbb{C}} = \bigcup_{i \in I} V_i$, donc le point à l'infini est inclus dans un de ces ouverts; notons le $V_{i_0} = \{\infty\} \cup \mathbb{C} \setminus K$. Or par le recouvrement, on a que $K \subset \bigcup_{i \neq i_0} V_i$. En considérant les \tilde{V}_i , qui sont les traces de ces ouverts de $\widehat{\mathbb{C}}$ sur \mathbb{C}^\ddagger , on obtient par compacité de K que $K \subset \bigcup_{i=1}^n \tilde{V}_i$. En repassant dans $\widehat{\mathbb{C}}$ (on note $V_{i_0} = V_0$), on obtient $\widehat{\mathbb{C}} = \bigcup_{i=0}^n V_i$, ce que nous cherchions à obtenir. □

Voyons maintenant ce que cet espace a à voir avec une sphère.

Propriété I.1.2. *La projection stéréographique induit un homéomorphisme entre $\widehat{\mathbb{C}}$ et \mathbb{S}_2 (la sphère unité de \mathbb{R}^3).*

Démonstration. Notons \mathbb{S}^{2*} la sphère unité de \mathbb{R}^3 privé de son pôle nord $N = (0, 0, 1)$, et identifions le plan équatorial avec \mathbb{C} .

La **projection stéréographique** π_N de \mathbb{S}^{2*} sur le plan équatorial associe à tout point $p \in \mathbb{S}^{2*}$ à l'intersection du plan équatorial et de la droite (N, p) (voir figure 1). Cette application est bijective et continue, et se prolonge par continuité sur \mathbb{S}^2 avec $\pi_N(N) = \infty$. Comme π_N est une bijection continue entre deux compacts, c'est un homéomorphisme. □

*. Ce sont les voisinages de l'infini.

†. Cette même procédure est applicable pour compactifier n'importe quel espace topologique localement compact.

‡. Si ce n'est pas un voisinage de l'infini, alors l'ouvert reste le même. Sinon, on enlève juste le point à l'infini.

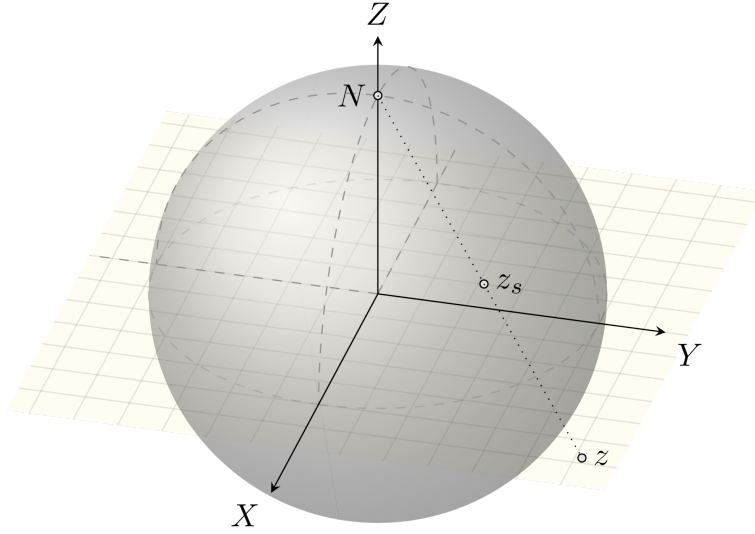


FIGURE 1 – Sphère de Riemann et projection stéréographique. (Source : Wikipedia.)

Remarque : Nous obtenons que $\widehat{\mathbb{C}}$ est simplement connexe et métrisable, avec la *distance cordale* $\sigma(z_1, z_2) = \|\pi_N^{-1}(z_1) - \pi_N^{-1}(z_2)\|$. La distance cordale entre 0 et l'infini (pôles Sud et Nord) n'est alors égale qu'à 2! D'autres distances existent, mais ça n'a pas grand intérêt ici.

La sphère de Riemann est aussi homéomorphe à la *droite projective complexe* \mathbb{P}^1 . Cela est très intéressant car on peut y faire de la géométrie algébrique, mais ça n'est pas l'objet de notre étude.

Propriété I.1.3. *La sphère de Riemann peut être munie d'une structure de variété complexe de dimension 1, aussi appelée surface de Riemann.*

Cela signifie qu'elle "ressemble localement au plan complexe", comme la Terre semble plate quand on la regarde de près. * Nous pouvons alors y faire de l'analyse en se ramenant à \mathbb{C} . La preuve suivante fait référence à des connaissances de bases sur les variétés, et n'est pas cruciale pour la compréhension des parties suivantes. La prochaine remarque sera cependant importante, et doit être méditée.

Démonstration. Commençons par recouvrir $\widehat{\mathbb{C}}$ par les deux ouverts $\Omega_0 = \mathbb{C}$ et $\Omega_\infty = \{\infty\} \cup \mathbb{C}^*$ (la sphère privée du pôle Nord ou Sud). Définissons maintenant deux homéomorphismes :

$$\begin{aligned} \chi_0 : \quad \Omega_0 &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z \quad , \\ \\ \chi_\infty : \quad \Omega_\infty &\rightarrow \mathbb{C} \\ \infty &\mapsto 0 \quad . \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

*. Pour plus de détails sur les surfaces de Riemann, voir le chapitre 1 de [Mil].

Les cartes (Ω_0, χ_0) et $(\Omega_\infty, \chi_\infty)$ forment un atlas de $\widehat{\mathbb{C}}$. Les changements de cartes $\chi_0 \circ (\chi_\infty)^{-1}$ et $\chi_\infty \circ (\chi_0)^{-1}$ sont définies et holomorphes sur \mathbb{C}^* , à valeurs dans \mathbb{C} . En effet :

$$\chi_0 \circ \chi_\infty^{-1}(z) = \chi_\infty \circ \chi_0^{-1}(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Nous avons donc muni $\widehat{\mathbb{C}}$ d'une structure de variété complexe de dimension 1. □

Remarque importante : La sphère ayant toutes les symétries, nous aimerions pouvoir ramener l'étude au voisinage de n'importe quel point $p \in \widehat{\mathbb{C}}$ à celle au voisinage de 0. Pour se faire, on considère une carte locale (χ_p, V_p) telle que $\chi_p = (0)$. Si $p = \infty$, alors nous prenons la même carte que dans la preuve. Sinon, on prend un voisinage de p dans \mathbb{C} et on considère $\chi_p(z) = z - p$. La fonction χ_p est parfois appelée **système de coordonnées locales**. Cette démarche est cruciale et sera appliquée tout au long de la suite.

Nous aurons aussi besoin d'un certain type de transformations explicites, qui permettent (par conjugaison) de déplacer des points tout en conservant des propriétés importantes des fractions rationnelles.

Définition I.1.4 – Transformations de Möbius. On se donne $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. La fraction rationnelle :

$$M : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

est appelée une **transformation de Möbius**. On a pour convention

$$M(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

On note $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ l'ensemble des transformations de Möbius définies sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

L'ensemble des transformations de Möbius forme le groupe des automorphismes de la sphère de Riemann, dont les propriétés sont détaillées dans l'annexe [A.2](#).

I.2. Analyse sur $\widehat{\mathbb{C}}$

Dans l'idée, on peut dire que les fonctions holomorphes de $\widehat{\mathbb{C}}$ sont les fonctions méromorphes sur \mathbb{C} "continues à l'infini", où l'on prolonge la valeur des pôles sur $\widehat{\mathbb{C}}$ par continuité (f y vaut ∞). Cependant, la structure de variété complexe permet de définir l'holomorphie sur $\widehat{\mathbb{C}}$ plus rigoureusement (on se ramène toujours dans \mathbb{C} , en renvoyant ∞ sur 0). La définition suivante peut paraître compliquée, mais sera explicitée ensuite.

Définition I.2.1. Soient Ω est un ouvert de $\widehat{\mathbb{C}}$, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

On dit que f est holomorphe au voisinage de z_0 si $\chi_\beta \circ f \circ \chi_\alpha^{-1}$ est une fonction holomorphe au voisinage de $\chi_\alpha(z_0)$ dans \mathbb{C} , dès lors que χ_α et χ_β désignent χ_0 ou χ_∞ et que $\chi_\beta \circ f \circ \chi_\alpha^{-1}$ est définie en $\chi_\alpha(z_0)$. De plus, la structure de variété assure que le choix de carte n'importe pas, pourvu que tout soit bien défini.

Regardons ce que nous allons considérer concrètement pour vérifier l'holomorphie de f au voisinage de z_0 .

- Si $f(z_0) \neq \infty$, on prend $\chi_\beta = \chi_0$:
 - Si $z_0 \neq \infty$ (le cas facile), il suffit de considérer $\chi_0 \circ f \circ \chi_0^{-1}$ c'est-à-dire f elle-même au voisinage de z_0 dans \mathbb{C} .
 - Si $z_0 = \infty$, on considère $\chi_0 \circ f \circ \chi_\infty^{-1}$ qui vaut $f(\frac{1}{z})$ si $z \neq 0$ et $f(\infty)$ sinon, au voisinage de 0 dans \mathbb{C} .
- Sinon, $f(z_0) = \infty$ et on prend $\chi_\beta = \chi_\infty$. On procède de manière analogue :
 - Si $z_0 \neq \infty$, on prend $\chi_\alpha = \chi_0$ et on travaille avec la fonction valant $\frac{1}{f(z)}$ si $z \neq z_0$ et 0 $z = z_0$, au voisinage de z_0 dans \mathbb{C} .
 - Si $z_0 = \infty$ (le cas le plus compliqué), on prend $\chi_\alpha = \chi_\infty$ et on considère $\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ si $z \neq 0$ et 0 sinon, au voisinage de 0 dans \mathbb{C} .

Par exemple, une fonction méromorphe f de $\hat{\mathbb{C}}$ admettant une limite à l'infini (comme une fraction rationnelle) se prolonge par continuité en une fonction de $\mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}})$. On dit alors que f admet une singularité effaçable ou un pôle à l'infini. La fonction exponentielle ne peut pas être holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ car elle n'est pas continue au point ∞ ; on dit qu'elle y admet une singularité essentielle.

Comme nous allons le voir, les propriétés de nature locale (principe du maximum, des zéros isolés...) des fonctions de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ se transportent sur celles de $\mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}})$. Ceci nous amène au théorème important de cette partie, qui justifie pourquoi nous n'itérerons que des fractions rationnelles dans les parties suivantes.

Théorème I.2.2. *Les fonctions holomorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$ sont les fractions rationnelles.*

Pour prouver cela, nous avons besoin des propriétés suivantes.

Propriété I.2.3. 1. *Une fonction holomorphe $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ est constante.*

2. *Une fonction entière $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ admet un prolongement sur $\mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}})$ si et seulement si f est un polynôme.*

Démonstration. 1. La restriction $f|_{\mathbb{C}}$ est entière et bornée au voisinage de l'infini, donc par le théorème de Liouville, elle est constante. Par continuité, la valeur en l'infini est la même.

2. Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathbb{C}$. Elle admet une singularité à l'infini ; si elle est effaçable, alors c'est une constante dans \mathbb{C} , donc f est constante par la propriété 1 et donc c'est gagné. Sinon, c'est un pôle ou une singularité essentielle.

Considérons maintenant $\tilde{f} = \chi_\infty \circ f \circ \chi_\infty$, i.e. $\tilde{f}(w) = (f(w^{-1}))^{-1} = (\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n w^{-n})^{-1}$ pour w au voisinage de 0. Cette fonction est holomorphe au voisinage de 0 si et seulement si la série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n w^{-n}$ admet bien une limite en 0, c'est-à-dire si ce n'est pas une singularité essentielle. Donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque nulle, et alors f est un polynôme. □

Démonstration du théorème I.2.2. Soit $f \in \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}})$. Par le principe des zéros isolés et en effectuant les bons changements de cartes, elle admet un nombre fini de pôles sur le voisinage de l'infini $\hat{\mathbb{C}} \setminus D(0, R)$. De même, elle admet un nombre fini de pôles sur le compact $\overline{D(0, R)}$. Soient donc $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ les

pôles de f sur \mathbb{C} , de multiplicités k_1, \dots, k_p . La fonction $g : z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \prod_{j=1}^p (z - a_j)^{k_j} \in \mathbb{C}$ est donc entière. Elle se prolonge naturellement sur $\widehat{\mathbb{C}}$ en une fonction holomorphe, donc c'est un polynôme. On obtient ainsi que f est une fraction rationnelle. \square

Intéressons nous maintenant au cas des fractions rationnelles.

Définition I.2.4 – Degré d'une fraction rationnelle. Soit P, Q deux fonctions polynômiales à coefficients complexes, premiers entre eux et $f = \frac{P}{Q} \in \mathcal{H}(\widehat{\mathbb{C}})$ une fraction rationnelle. Son degré $\deg f$ est défini comme :

$$\deg f := \max \{ \deg P, \deg Q \}$$

On peut dès à présent remarquer que, pour une fraction rationnelle f , $\deg f^n = (\deg f)^n$: lorsque $\deg f \geq 2$, le degré de f^n croît exponentiellement avec n , et c'est là que l'étude du système dynamique devient riche et intéressante. C'est pourquoi nous nous concentrerons sur le cas des fractions rationnelles de degré supérieur ou égal à 2.

On a également la propriété suivante, qui nous sera utile pour étudier leurs comportements en familles.

Propriété I.2.5. *L'application $\deg : \mathcal{H}(\widehat{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{N}$ est continue, pour la topologie de la convergence uniforme sur $\widehat{\mathbb{C}}$ pour les fractions rationnelles.*

Démonstration. On munit $\mathcal{H}(\widehat{\mathbb{C}})$ de la distance :

$$\rho(f, g) = \sup_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} \sigma(f(z), g(z))$$

qui engendre bien la topologie de la convergence uniforme sur $\widehat{\mathbb{C}}$, de telle sorte qu'on travaille maintenant entre les espaces métriques $(\mathcal{H}(\widehat{\mathbb{C}}), \rho)$ et $(\mathbb{N}, |\cdot|)$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fractions rationnelles sur $\widehat{\mathbb{C}}$, qui converge uniformément vers $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. L'holomorphie étant préservée par convergence uniforme, f est donc une fonction holomorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$, donc une fraction rationnelle.

Notons z_1, \dots, z_t les zéros de f , et $p_1, \dots, p_{t'}$ ses pôles, qu'on peut tous supposer différents de ∞ quitte à conjuguer par une transformation de Möbius appropriée. Construisons des disques deux à deux disjoints $(D_j)_{1 \leq j \leq t}$, centrés en chacun des zéros de f , et $(D'_j)_{1 \leq j \leq t'}$ centrés en chacun des pôles de f . Notons enfin K le complémentaire de la réunion des disques $(D_j)_{1 \leq j \leq t}$ et $(D'_j)_{1 \leq j \leq t'}$.

Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f , on peut prendre n_0 assez grand pour que f_{n_0} n'ait pas de pôles dans le disque D_j . Comme f_{n_0} et f sont uniformément proches sur le cercle ∂D_j , d'après le théorème de Rouché, f_{n_0} et f ont le même nombre de zéros dans D_j (avec multiplicité). On peut effectuer le même raisonnement dans les disques D'_j pour montrer que f_{n_0} et f ont le même nombre de pôles (avec multiplicité) dans le disque D'_j .

En prenant N assez grand, pour $n \geq N$, f_n et f ont le même nombre de zéros et de pôles dans chacun des D_j , et sont à la fois majorées (par une constante finie) et minorées (par une constante strictement positive) en module sur K : elles possèdent donc le même nombre de zéros et de pôles sur $\widehat{\mathbb{C}}$, donc ont le même degré à partir d'un certain rang. \square

Concluons cette partie avec une dernière proposition, qui sera très utile pour étudier la dynamique.

Proposition I.2.6 – Nombre de points fixes d’une fraction rationnelle. *Soit f une fraction rationnelle sur $\widehat{\mathbb{C}}$ de degré d . Alors f possède exactement $(d + 1)$ points fixes dans $\widehat{\mathbb{C}}$, en les comptant avec multiplicité.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}(\widehat{\mathbb{C}})$; en conjuguant par une transformation de Möbius* qui ne fixe pas l’infini, on peut supposer que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fraction rationnelle qui ne fixe pas l’infini non plus. Elle s’écrit alors sous la forme :

$$f = \frac{P}{Q}$$

où P et Q sont des polynômes, avec $\deg P \leq \deg Q = \deg f$ (car f ne fixe pas l’infini). Le complexe z est point fixe de f si et seulement si il vérifie l’équation $f(z) = z$, qu’on peut réécrire :

$$P(z) - zQ(z) = 0$$

Cela revient à trouver les racines dans \mathbb{C} d’un polynôme de degré $(\deg f + 1)$, qui sont bien au nombre de $(\deg f + 1)$ (en les comptant avec multiplicité) d’après le théorème de d’Alembert. \square

Remarque : On peut appliquer la même démonstration à f^p pour trouver les points périodiques de f dont la période divise p .

I.3. Les familles normales

Maintenant que nous savons quelles sont les fonctions holomorphes de $\widehat{\mathbb{C}}$, nous pouvons nous intéresser au comportement en familles. Nous allons voir qu’il existe des régions où la dynamique est stable (c’est-à-dire qu’elle reste la même sur un petit voisinage), et d’autres où la dynamique dépend fortement des conditions initiales.†

Exemple I.3.1. Prenons un exemple-jouet extrêmement simple, avec la fonction $f : z \in \widehat{\mathbb{C}} \mapsto \frac{1}{z^2} \in \widehat{\mathbb{C}}$.

On observe qu’au voisinage d’un point $|z| < 1$, la famille des itérées pour les temps pairs (f^{2n}) converge uniformément vers la fonction constante égale à 0, et la famille des itérées de temps impairs (f^{2n+1}) vers celle constante égale à ∞ . De même pour si $|z| > 1$, en inversant les deux comportements.

Cependant, si $|z| = 1$, alors la dynamique dépend fortement des conditions initiales; en effet, les points du cercle \mathbb{S}^1 restent, alors que les autres vont osciller de plus en plus proche entre 0 et ∞ . C’est un phénomène de déchirement.

Cette section cherche à formaliser les notions de stabilité/dépendance aux conditions initiales. Il faut pour cela introduire la théorie des familles normales, développée par Paul Montel et dont l’utilisation par Fatou et Julia a révolutionné l’étude de la dynamique holomorphe.‡ Comme cette propriété est locale, nous ne travaillons dans la suite qu’avec des ouverts de \mathbb{C} , et non de $\widehat{\mathbb{C}}$ (quitte à ramener le point ∞ ailleurs).

*. On conserve ainsi une fraction rationnelle de même degré.

†. Ces ensembles seront respectivement appelés ensemble de Fatou et de Julia, en l’honneur de leurs découvreurs.

‡. "Une des applications les plus intéressantes de la théorie des familles normales concerne l’itération des fractions rationnelles, dont l’étude générale a été conduite très loin dans cette voie par les beaux travaux de M. Fatou et M. Julia." Paul Montel.

Définition I.3.2. On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers f sur une partie $X \subset \mathbb{C}$ lorsque pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage V de x tel que la convergence soit uniforme sur V .

Cela revient à dire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de X .

Définition I.3.3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . On dira que la famille \mathcal{F} de $\mathcal{C}(\Omega, \hat{\mathbb{C}})$ est **normale** si l'adhérence de \mathcal{F} est compacte pour la topologie de la convergence uniforme locale.*

On dira que \mathcal{F} est **normale en un point** $z_0 \in \Omega$ s'il existe V_0 un voisinage de z_0 dans Ω telle que la famille des restrictions est normale.

Remarque importante : Une famille \mathcal{F} est donc normale si et seulement si toute suite (f_n) d'éléments de \mathcal{F} possède une sous-suite qui converge uniformément localement sur Ω . C'est cette caractéristique que nous allons fortement utiliser dans la suite, alliée à un autre propriété cruciale, l'équicontinuité (qui traduit qu'il n'y a pas de déchirement, que tout reste packé). D'après le théorème suivant, ce sont les deux faces d'une même pièce.

Définition I.3.4. Une famille \mathcal{F} est dite équicontinue en un point $z_0 \in \Omega$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \sigma(z_0, z) < \delta \Rightarrow \sigma(f(z_0), f(z)) < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Elle est dite équicontinue sur Ω si elle l'est pour tous les points de cet ouvert.

Théorème I.3.5. Une famille $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\Omega, \hat{\mathbb{C}})$ est normale si et seulement si elle est équicontinue sur Ω .

Démonstration. Comme $(\hat{\mathbb{C}}, \sigma)$ est un espace métrique compact, le théorème d'Ascoli donne l'équivalence voulue. \square

Terminons cette partie avec deux théorèmes fondamentaux pour la suite de notre étude.

Définition I.3.6. On dit qu'une famille de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un ensemble E et à valeurs dans \mathbb{C}^\dagger est **uniformément bornée** sur E s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z)| \leq M$.

Théorème I.3.7 – Montel. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de \mathbb{C} . Si cette suite est uniformément bornée, alors elle est normale.

Démonstration. Par hypothèse, les fonctions f_n sont à valeurs dans le compact $\overline{D(0, M)} \subset \mathbb{C}$. Donc par le théorème d'Ascoli, il suffit de montrer que la suite est équicontinue sur Ω , ce que nous allons faire à l'aide de la formule de Cauchy.

Soit $z_0 \in \Omega$ et $r < d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Par la formule de Cauchy, on a que pour tout $|u| < r$:

$$f_n(z_0 + u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_n(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta} - u} re^{i\theta} d\theta.$$

Il s'ensuit que si $\max(|u|, |u'|) < r$, alors :

$$f_n(z_0 + u) - f_n(z_0 + u') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_n(z_0 + re^{i\theta})(u' - u)}{(re^{i\theta} - u)(re^{i\theta} - u')} re^{i\theta} d\theta,$$

*. On dit que \mathcal{F} est pré-compacte pour cette topologie.

†. On peut toujours s'y ramener par la bonne carte.

puis si $\max(|u|, |u'|) < \frac{r}{2}$,

$$\begin{aligned} |f_n(z_0 + u) - f_n(z_0 + u')| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(z_0 + re^{i\theta})| \frac{|u' - u|}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} r d\theta \\ &\leq \frac{4M}{r} |u' - u|. \end{aligned}$$

Ce qui conclut l'équicontinuité de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en z_0 . □

Le prochain théorème est aussi fondamental, mais la preuve étant plus compliquée, nous n'allons pas l'aborder.

Théorème I.3.8 – Critère fondamental de normalité*. Soient a, b, c trois points distincts de $\hat{\mathbb{C}}$. Si \mathcal{F} une famille de fonctions holomorphes de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ (i.e. toutes les fonctions évitent trois mêmes points), alors \mathcal{F} est normale.

*. Ou aussi "Théorème de Picard-Montel".

II. Dynamique sur la sphère de Riemann

Armés des outils de l'analyse sur la sphère de Riemann, on propose ici une première description des phénomènes dynamiques sur cet espace.

II.1. Orbites et cycles

Etant donnée une fraction rationnelle f , on cherche à étudier le comportement de la famille de fonctions holomorphes $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $f^n := f^{\circ n}$ désigne l'itérée n -ième de la fonction f .

Définition II.1.1 – Orbites. Soit $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, et f une fraction rationnelle sur $\widehat{\mathbb{C}}$. On définit :

- son **orbite future**, ou plus simplement son **orbite**, constituée des images de z par les itérées de f , comme :

$$\mathcal{O}_f^+(z) := \{f^n(z) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

- son **orbite passée**, constituée des préimages de z par les itérées de f , comme :

$$\mathcal{O}_f^-(z) := \left\{ y \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n(y) = z \right\},$$

- sa **grande orbite**, qui est la réunion de ses orbites passée et future :

$$\mathcal{O}_f(z) := \mathcal{O}_f^+(z) \cup \mathcal{O}_f^-(z).$$

Définition II.1.2 – Invariance. Soit E un sous-ensemble de $\widehat{\mathbb{C}}$, et f une fraction rationnelle. Il est dit :

- **invariant dans le futur**, ou simplement **invariant** par f si $f(E) \subset E$;
- **invariant dans le passé** par f si $f^{-1}(E) \subset E$;
- **totalement invariant** par f s'il est à la fois invariant dans le futur et dans le passé. Autrement dit, $f(E) = E = f^{-1}(E)$.

Définition II.1.3 – Périodicité. Soit $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, et f une fraction rationnelle sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

- z est dit **périodique** s'il existe un entier p tel que $f^p(z) = z$;
- Plus précisément, il est dit p -périodique si $f^p(z) = z$, et si pour tout diviseur strict d de p , $f^d(z) \neq z$. On appelle p -cycle l'orbite d'un point p -périodique ;
- On appelle **point fixe** tout point 1-périodique pour f .

Notation : Pour plus de commodités, on notera un p -cycle \mathcal{C} sous la forme :

$$\mathcal{C} = \{z_i \mid i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$$

de telle sorte que, pour $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$, on ait $f^k(z_i) = z_{i+(k \bmod p)}$.

Comme il est plus commode de travailler avec des points fixes que des p -cycles, nous confondrons plusieurs fois f et f^p dans la suite.

Enfin, on cherche à caractériser les points fixes avec la définition suivante :

Définition II.1.4 – Répulsion, attraction et indifférence topologiques. Soit f une fraction rationnelle et \hat{z} un de ses points fixes.

- \hat{z} est dit **topologiquement répulsif** s'il existe un voisinage \mathcal{U} tel que, pour tout $y \in \mathcal{U} \setminus \{\hat{z}\}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(y) \notin \mathcal{U}$.
- Au contraire, \hat{z} est dit **topologiquement attractif** s'il existe un voisinage \mathcal{U} tel que la suite $(f^n|_{\mathcal{U}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction constante $\mathcal{U} \rightarrow \{\hat{z}\}$.
- Si on ne se trouve dans aucun des deux cas, le point fixe est dit **topologiquement indifférent** (ou neutre).

Par extension, un p -cycle est dit topologiquement attractif (respectivement répulsif, indifférent) si chacun des points qui composent ce cycle est un point fixe topologiquement attractif (respectivement répulsif, indifférent) pour l'itérée f^p .

Nous verrons dans la partie III.1 qu'on peut également caractériser un point périodique avec la notion de multiplicateur, en considérant un point p -périodique comme point fixe de f^p . Ce résultat de dynamique holomorphe est remarquable, car faux dans le cas strictement réel. On a de plus la proposition suivante.

Proposition II.1.5. *Le multiplicateur ne dépend ni du choix d'un point du p -cycle, ni de la carte qui envoie ce point sur l'origine.*

Démonstration. Soit f une fraction rationnelle, $\mathcal{C} = \{z_1, \dots, z_p\}$ l'un de ses p -cycles. Montrons d'abord que, pour $z_i \in \mathcal{C}$ fixé, le multiplicateur ne dépend pas du choix de la carte locale. Soit χ et ψ deux cartes locales sur un voisinage V de z_i , telles que $\chi(z_i) = 0$ et $\psi(z_i) = 0$. On a alors, en posant $\sigma = \psi \circ \chi^{-1}$:

$$\psi \circ f^p \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \chi^{-1}) \circ (\chi \circ f^p \circ \chi^{-1}) \circ (\chi \circ \psi^{-1}) = \sigma \circ (\chi \circ f^p \circ \chi^{-1}) \circ \sigma^{-1}.$$

En appliquant la formule de dérivation composée en 0, on trouve alors :

$$(\psi \circ f^p \circ \psi^{-1})'(0) = \sigma'(0) (\chi \circ f^p \circ \chi^{-1})'(0) (\sigma'(0))^{-1} = (\chi \circ f^p \circ \chi^{-1})'(0).$$

Pour montrer l'indépendance du multiplicateur vis-à-vis du choix d'un point du p -cycle, donnons-nous maintenant une famille $(\chi_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ de cartes locales au voisinage de chacun des points z_i de \mathcal{C} , et telles que :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \chi_i(z_i) = 0.$$

Alors, pour tout $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a (en considérant le produit écrit ci-dessous au sens d'une composition de fonctions) :

$$\chi_j \circ f^p \circ \chi_j^{-1} = \prod_{k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \chi_{j+k+1} \circ f \circ \chi_{j+k}^{-1}.$$

Par dérivation composée, on obtient alors :

$$\left(\chi_j \circ f^p \circ \chi_j^{-1} \right)'(0) = \prod_{k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\chi_{j+k+1} \circ f \circ \chi_{j+k}^{-1} \right)'(0).$$

On a déjà vu que le terme de gauche ne dépendait pas de la carte χ_j choisie ; quant au terme de droite, il ne dépend pas de l'indice $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ choisi : cela montre bien que le multiplicateur ne dépend que du cycle \mathcal{C} . \square

II.2. Dichotomie dynamique

A partir de la définition précédente, on remarque que la suite des itérées $(f^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est normale dans un voisinage des points fixes attractifs, mais qu'elle ne l'est pas pour les points fixes répulsifs. De manière plus générale, on peut effectuer une partition de la sphère de Riemann en deux ensembles :

- l'ensemble de **Fatou**, noté $\mathcal{F}(f)$, qui contient l'ensemble des points en lesquels la famille des itérées de f est normale ;
- l'ensemble de **Julia**, noté $\mathcal{J}(f)$, qui est le complémentaire de l'ensemble de Fatou.

Concrètement, si un point z_0 est dans $\mathcal{F}(f)$, cela veut dire que la famille des itérées est équicontinue sur un certain voisinage \mathcal{V}_0 de z_0 : soit $z'_0 \in \mathcal{V}_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(z_0)$ et $f^n(z'_0)$ seront aussi proches qu'on le souhaite pourvu que z_0 et z'_0 soient assez proches. On dit que la dynamique de f est **stable** sur l'ensemble de Fatou. Au contraire, la dynamique **dépend fortement des conditions initiales** sur l'ensemble de Julia. Nous verrons dans la partie [IV.2](#) que la dynamique sur $\mathcal{J}(f)$ est même **chaotique**, ce qui est encore plus fort. La section [A.1](#) donne un aperçu de la zoologie de ces ensembles, qui se comprennent mieux en les observant d'abord.

En partant de ces définitions, on peut dès lors en déduire des propriétés topologiques et dynamiques des ensembles de Julia et de Fatou.

Exemple II.2.1. En reprenant la fonction $f : z \in \widehat{\mathbb{C}} \mapsto \frac{1}{z^2} \in \widehat{\mathbb{C}}$ de l'exemple [I.3.1](#), on obtient que $\mathcal{J}(f) = \mathbb{S}^1$ (le cercle unité), et que $\mathcal{F}(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{S}^1$. L'ensemble de Julia est exceptionnellement lisse (car la fonction f est exceptionnellement simple), et n'est pas représentatif de la "fractilité" générale des ensembles de Julia.

Propriété II.2.2. *L'ensemble de Fatou $\mathcal{F}(f)$ est ouvert.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathcal{F}(f)$, la famille $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est normale en z_0 , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage \mathcal{V}_0 sur lequel $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est normale. Cela revient à dire que $\text{Int}(\mathcal{V}_0) \subset \mathcal{F}(f)$; $\mathcal{F}(f)$ est donc ouvert. \square

Corollaire II.2.3. *L'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$ est fermé, donc compact.*

Propriété II.2.4. *$\mathcal{J}(f)$ et $\mathcal{F}(f)$ sont totalement invariants par f .*

Démonstration. Montrons que $\mathcal{F}(f)$ est totalement invariant par f ; par passage au complémentaire, on en déduira que $\mathcal{J}(f)$ l'est aussi. On a :

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{F}(f) &\iff (f^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est normale en } z, \\ &\iff (f^{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est normale en } z, \\ &\iff (f^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est normale en } f(z). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathcal{F}(f)$ est invariant dans le futur. Notons qu'on a pu obtenir la deuxième équivalence car rajouter ou enlever une fonction continue à une famille de fonctions ne change pas le caractère équicontinu de la famille.

De même, si $z \in \mathcal{F}(f)$ et $z' \in f^{-1}(z)$, $(f^{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est normale en z' ; donc $z' \in \mathcal{F}(f)$, ce qui montre que $\mathcal{F}(f)$ est invariant dans le passé, donc totalement invariant. \square

Propriété II.2.5. *L'ensemble de Fatou d'une fraction rationnelle f et de l'une quelconque de ses itérées f^n sont identiques. Par passage au complémentaire, il en est de même pour leurs ensembles de Julia.*

Remarque : Avec cette propriété, on pourra considérer indifféremment les ensembles de Julia et de Fatou d'une fraction rationnelle ou de l'une de ses itérées, et ainsi traiter les points périodiques comme des points fixes.

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathcal{F}(f^2)$. Cela veut dire que sur un voisinage \mathcal{U} de z_0 , la famille $(f^{2n}|_{\mathcal{U}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est contenue dans une partie compacte K de $\mathcal{H}(\mathcal{U}, \hat{\mathbb{C}})$. Alors la famille $(f^n|_{\mathcal{U}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est contenue dans la partie $K \cup f \circ K$, qui est également une partie compacte de $\mathcal{H}(\mathcal{U}, \hat{\mathbb{C}})$ (par la propriété de Bolzano-Weierstrass). Donc z_0 appartient bien $\mathcal{F}(f)$.

Montrons l'inclusion inverse, si z_0 appartient $\mathcal{F}(f)$, alors, pour un certain voisinage \mathcal{U} de z_0 , $(f^n|_{\mathcal{U}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est contenue dans une partie compacte $K \subset \mathcal{H}(\mathcal{U}, \hat{\mathbb{C}})$. Comme $(f^{2n}|_{\mathcal{U}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une sous-suite de $(f^n|_{\mathcal{U}})_{n \in \mathbb{N}^*}$, elle est également contenue dans la partie compacte K , donc $z_0 \in \mathcal{F}(f^2)$.

On peut réaliser le même raisonnement pour un entier p quelconque à la place de 2, et en conclure que $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^p)$. \square

Propriété II.2.6. *Lorsque f est de degré supérieur ou égal à 2, $\mathcal{J}(f)$ n'est pas vide.*

Démonstration. Supposons qu'il existe f , de degré supérieur ou égal à 2 et telle que sa famille des itérées $(f^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit normale sur tout $\hat{\mathbb{C}}$. Cela veut dire qu'elle converge uniformément sur le compact $\hat{\mathbb{C}}$ tout entier vers une certaine fonction holomorphe g . Par la propriété I.2.5, on en déduit que la suite d'entiers $(\deg f^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante à partir d'un certain rang.

Cependant, pour tout entier n ,

$$\deg(f^n) = (\deg f)^n \geq 2^n \rightarrow \infty$$

D'où la contradiction. L'ensemble de Julia de la fonction f est donc non vide. \square

A partir de la définition des points fixes attractifs, on peut commencer à caractériser certaines composantes des ensembles de Fatou :

Définition II.2.7 – Bassins d'attraction. Le bassin d'attraction d'un point attractif \hat{z} d'une fraction rationnelle f est :

$$\mathcal{A}_{\hat{z}} := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \hat{z}\}$$

On appelle **bassin immédiat** la composante connexe de $\mathcal{A}_{\hat{z}}$ contenant \hat{z} , et qu'on notera $\mathcal{A}_{\hat{z}}^{\text{imm}}$. De la même manière, le bassin d'attraction (immédiat) d'un p -cycle attractif est la réunion des bassins d'attraction (immédiats), pour la fonction f^p , de chacun des points du cycle.

Exemple II.2.8. Si on reprend la fonction f de l'exemple II.2.1 ; ses points fixes attractifs 0 et ∞ ont comme bassins d'attraction immédiats respectifs les ensembles \mathbb{D} et $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Les bassins d'attraction sont des ouverts contenus dans l'ensemble de Fatou : la suite des itérées converge uniformément localement vers la fonction constante $z \mapsto \hat{z}$. On étendra la classification des composantes connexes des ensembles de Fatou dans la partie IV.3.

Le théorème suivant montre le lien entre ensemble de Julia et bassins d'attraction :

Théorème II.2.9. *Si \hat{z} est un point périodique attractif de f , $\partial\mathcal{A}_{\hat{z}} = \mathcal{J}(f)$*

Pour le montrer, nous aurons d'abord besoin des résultats suivants.

Définition II.2.10 – Points exceptionnels. Un point exceptionnel d'une fraction rationnelle est un point dont la grande orbite est finie.

Leur caractère *exceptionnel* est justifié par la proposition qui suit.

Proposition II.2.11 – Points exceptionnels. *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. L'ensemble $\mathcal{E}(f)$ de ses points exceptionnels contient au plus deux éléments : ceux-ci sont des points périodiques super-attractifs, qui sont dans l'ensemble de Fatou de f .*

Démonstration. Quel que soit le point $z \in \hat{\mathbb{C}}$, sa grande orbite $\mathcal{O}_f(z)$ est complètement invariante par f . Ainsi, si $z_0 \in \mathcal{E}(f)$, f réalise une bijection de $\mathcal{O}_f(z_0)$ dans lui-même. Autrement dit, $\mathcal{O}_f(z_0) = \{z_0, \dots, z_p\}$ contient les éléments d'une orbite périodique :

$$z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots \mapsto z_p \mapsto z_0$$

Cependant, f étant de degré d , chaque point possède exactement d antécédents (comptés avec multiplicité). Comme chacun des points $z_k \in \mathcal{O}_f(z_0)$ a exactement un antécédent (qui est z_{k-1}) de multiplicité d . Cela n'est possible que si z_{k-1} est un point critique de f , ce qui en fait bien un point périodique super-attractif dans l'ensemble de Fatou.

De plus, $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$ étant totalement invariant, si $\mathcal{E}(f)$ contient trois points ou plus, par le théorème de Montel, la suite des itérées serait normale sur $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$ et alors $\mathcal{F}(f)$ serait $\hat{\mathbb{C}}$ tout entier, ce qui contredit la propriété II.2.6. Donc $\mathcal{E}(f)$ est réduit à au plus deux points. \square

Théorème II.2.12 – Transitivité sur l'ensemble de Julia. *Soient f une fraction rationnelle, $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, et \mathcal{V} un voisinage de z_0 . Alors la réunion $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} f^n(\mathcal{V})$ contient tout l'ensemble de Julia, et toute la sphère de Riemann sauf au plus deux points. Plus précisément, si on choisit \mathcal{V} assez petit, alors $\mathcal{U} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$.*

Démonstration. Supposons que $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{U}$ contienne au moins trois points distincts ; par le critère de Montel, la suite $(f^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ serait normale en \mathcal{U} , c'est-à-dire que \mathcal{U} serait dans l'ensemble de Fatou de f . On a ici une contradiction, car $z_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{J}(f)$, les ensembles de Julia et de Fatou étant disjoints.

Ainsi, $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{U}$ contient au plus deux points. De plus, \mathcal{U} étant invariant dans le futur, son complémentaire $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{U}$ est invariant dans le passé. Comme $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{U}$ est de cardinal au plus 2, si $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{U}$, ses préimages sont forcément périodiques, et z est donc lui-même périodique, et exceptionnels. Donc $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{U} \subset \mathcal{E}(f)$, et comme l'ensemble de Julia et $\mathcal{E}(f)$ sont disjoints, $\mathcal{J}(f) \subset \mathcal{U}$.

Enfin, si notre voisinage de départ \mathcal{V} est disjoint de $\mathcal{E}(f)$, alors $\mathcal{U} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$. \square

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire II.2.13. *Soit z_0 un point de $\mathcal{J}(f)$, alors l'ensemble*

$$\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid f^n(z) = z_0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans $\mathcal{J}(f)$.

Remarque : Ce résultat fournit un algorithme pour tracer numériquement un ensemble de Julia (même si ce n'est pas le plus efficace).

On peut également montrer la propriété topologique suivante :

Propriété II.2.14. *L'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle de degré au moins 2 est parfait (i.e. sans point isolé).*

Démonstration. Soit f une fraction rationnelle de degré au moins 2 ; son ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$ est totalement invariant par f . S'il était fini, ses points auraient des grandes orbites finies et seraient dans $\mathcal{F}(f)$ ce qui pose une contradiction : $\mathcal{J}(f)$ est forcément de cardinal infini. Il est de plus compact, donc admet un point d'accumulation z_0 . Par le corollaire II.2.13, les préimages de z_0 par la suite des itérées $(f^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment une partie dense de $\mathcal{J}(f)$, qui plus est sans point isolé. En effet, soit \hat{z}_n l'une des préimages de z_0 (par f^n par exemple), et \mathcal{U} l'un de ses voisinages ; comme f est holomorphe non constante, $f^n(\mathcal{U})$ est un voisinage de z_0 , qui contient alors un autre * point $z' \in \mathcal{J}(f)$. Donc \mathcal{U} contient une préimage de z' par f^n , qui est aussi un point de $\mathcal{J}(f)$. Cela montre bien la perfection de $\mathcal{J}(f)$. \square

Avec ces outils en main, on peut maintenant démontrer le théorème II.2.9.

Démonstration du théorème II.2.12. Soient z_0 un point fixe attractif d'une fraction rationnelle f , et \mathcal{A} son bassin d'attraction. Soit \mathcal{V} un voisinage d'un point de $\mathcal{J}(f)$; alors la propriété de transitivité de l'ensemble de Julia nous dit que $f^n(\mathcal{V})$ intersecte \mathcal{A} pour un certain entier n . Comme un bassin d'attraction est totalement invariant par f , cela veut dire que \mathcal{V} intersecte \mathcal{A} . On vient de montrer l'inclusion $\mathcal{J}(f) \subset \bar{\mathcal{A}}$, et même $\mathcal{J}(f) \subset \partial\mathcal{A}$ car \mathcal{A} est une composante de l'ensemble de Fatou. Pour montrer l'inclusion inverse, prenons maintenant un voisinage \mathcal{U} d'un point de $\partial\mathcal{A}$. Ainsi, n'importe quelle limite des itérées $f^n|_{\mathcal{U}}$ doit avoir un point de discontinuité entre \mathcal{A} (où la suite des itérées converge uniformément localement vers z_0) et $\partial\mathcal{A}$. Donc $\partial\mathcal{A} \subset \mathcal{J}(f)$, ce qui conclut. \square

On peut tirer un corollaire supplémentaire des résultats précédents :

Corollaire II.2.15. *L'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle est soit d'intérieur vide, soit recouvre toute la sphère de Riemann. †*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{J}(f)$ ne soit pas d'intérieur vide, soit z_1 dans l'intérieur de $\mathcal{J}(f)$ et $\mathcal{V} \subset \mathcal{J}(f)$ un voisinage de z_1 . Comme $\mathcal{J}(f)$ est totalement invariant sous l'action de f , l'ensemble :

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\mathcal{V})$$

est contenu dans $\mathcal{J}(f)$ et son adhérence recouvre toute la sphère de Riemann. Comme l'ensemble de Julia est fermé, on a nécessairement $\mathcal{J}(f) = \hat{\mathbb{C}}$. \square

*. Et en réalité, une infinité de tels points puisque z_0 est point d'accumulation

†. En revanche, on peut trouver des ensembles de Julia d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue non nulle : cela a été un des grands axes de recherche impulsé par Adrien Douady et qui a conduit à la découverte de tels ensembles de Julia par Xavier Buff et Arnaud Chéritat en 2005.

Il existe en effet des fonctions dont les ensembles de Julia recouvrent toute la sphère de Riemann : regardons en détail un exemple donné par Lattès.

Exemple II.2.16 – Lattès, 1918. On définit la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 2z \end{array}$$

On peut dès lors remarquer que, en prenant n'importe quel ouvert non vide $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}$, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $f^n(\mathcal{V})$ recouvre entièrement au moins un pavé fondamental du réseau :

$$\Gamma = \{n + i \cdot m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}^*.$$

De plus, f passe au quotient (à la fois de groupes et de surfaces de Riemann) pour définir une fonction \bar{f} holomorphe sur le tore \mathbb{C}/Γ , de telle sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{C}/\Gamma \end{array}$$

On peut également quotienter par la relation d'équivalence \mathcal{R} définie sur le tore comme :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

On pourrait montrer (à l'aide de la formule de Riemann-Hurwitz) que la surface de Riemann $S := (\mathbb{C}/\Gamma)/\mathcal{R}$ ainsi obtenue est isomorphe à la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ †. \bar{f} passe une fois de plus au quotient pour définir la fonction \tilde{f} holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ de telle sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{C}/\Gamma \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

Plus concrètement, on peut montrer qu'une telle fonction \tilde{f} a pour expression (cf. [Beard.]) :

$$\tilde{f}(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)}.$$

Soit \mathcal{U} un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$, alors $\mathcal{V} := \pi^{-1}(\tilde{\pi}^{-1}(\mathcal{U}))$ est un ouvert de \mathbb{C} , dont l'image itérée va recouvrir un pavé fondamental du réseau Γ à partir d'un certain rang n_0 . Ainsi, pour $n \geq n_0$, $\pi(f^n(\mathcal{V}))$ recouvre tout \mathbb{C}/Γ ; et $\tilde{\pi}(\pi(f^n(\mathcal{V})))$ recouvre tout $\hat{\mathbb{C}}$ par surjectivité de $\tilde{\pi}$. Or, par commutativité des deux diagrammes précédents, on a les égalités ensemblistes :

$$\hat{\mathbb{C}} = \tilde{\pi}(\pi(f^n(\mathcal{V}))) = \tilde{f}^n(\tilde{\pi}(\pi(\mathcal{V}))) = \tilde{f}^n(\mathcal{U}).$$

Ainsi, aucune sous-suite des itérées de \tilde{f} ne peut converger sur un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$, donc $\mathcal{F}(\tilde{f})$ est bien vide.

*. On aurait en réalité pu utiliser n'importe quel réseau sur \mathbb{C} , on a choisi celui-ci pour se fixer les idées.

†. Et la projection $\tilde{\pi}$ peut être choisie comme un multiple de la fonction elliptique \wp de Weierstrass.

Remarque 1 : Les différents corollaires tirés de la propriété de transitivité sont à la base d’algorithmes calculant une image approchée d’ensembles de Julia. On peut notamment citer le corollaire [II.2.13](#) et surtout le théorème [II.2.9](#), qu’on a utilisé pour produire les différents ensembles de Julia présents dans ce document.

Remarque 2 : Les quelques ensembles de Julia étudiés jusqu’ici sont parfaitement lisses. Cela est assez exceptionnel, et on peut voir dans [\[Mil.\]](#) que les seuls ensembles de Julia lisses sont à conjugaison par une transformation de Möbius près : le segment, le cercle et la sphère de Riemann. En réalité, un ensemble de Julia a plutôt une allure fractale, ce qu’on caractérisera dans la partie [IV.2](#). Pour cela, on va avoir besoin d’étudier la dynamique localement autour des points périodiques.

II.3. Un pas vers le local : la conjugaison analytique

En algèbre linéaire, lorsqu’une matrice A est diagonalisable, il est plus facile de travailler avec sa version conjuguée D qui est bien diagonale. On change donc de base via une matrice de passage P , afin de mieux capturer le comportement de A . On obtient alors pour tout entier n (relatif si A est inversible, naturel sinon), $A^n = P^{-1}D^nP$. Fondamentalement, A et D traduisent la même application linéaire, représentée à travers deux bases différentes.

Ce concept de conjugaison est plus général, et joue un rôle fondamental dans l’étude des systèmes dynamiques. Développons-le dans le cadre de la dynamique holomorphe.

Définition II.3.1. On dit qu’une fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ est **analytiquement conjuguée** à une fonction $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ sur \mathcal{U} si il existe un changement de coordonnées locales ϕ qui réalise des biholomorphismes $\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}, \mathcal{U}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}'$ tel que l’équation fonctionnelle $\phi \circ f = g \circ \phi$ soit vérifiée sur \mathcal{U} . En d’autres termes, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{f} & \mathcal{U}' \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{g} & \mathcal{V}' \end{array}$$

Remarque : La fonction ϕ sera souvent dénommée "coordonnées" de l’équation fonctionnelle associée. Nous verrons alors les coordonnées de Koenigs, de Böttcher, de Fatou, etc...

Schröder fut le premier à exploiter le concept de conjugaison analytique, justement pour calculer l’itérée n -ième d’une fonction f .

Dans la suite, nous ne parlerons que de conjugaison au voisinage d’un point fixe (qu’on prendra sans perdre de généralité comme étant 0). N’étant qu’un phénomène local, ces méthodes se généralisent aux **germes** de fonctions holomorphes* fixant 0. Le concept de germe est très fécond et généralise la plupart des résultats qui suivront, mais ne sera pas retenu ici pour une question de simplicité.

Nous verrons dans la section suivante que cette étude locale est très fructueuse pour comprendre la structure globale du Julia et du Fatou. Les propriétés dynamiques (comme la nature des points fixes) sont conservées par conjugaison analytique. Cela est naturel, car ϕ n’est qu’un changement de

*. C’est-à-dire les fonctions au moins définies et holomorphes sur un voisinage de 0.

coordonnées locales adapté pour voir le mouvement des points plus simplement. De plus, nous pouvons itérer la relation de conjugaison tant qu'elle garde du sens :

$$f^n = \phi^{-1} \circ g^n \circ \phi.$$

Il n'est pas toujours facile de savoir si l'on peut conjuguer analytiquement deux fonctions holomorphes. Nous pouvons alors affaiblir les hypothèses, en essayant de ne les **conjuguer** que **formellement**, c'est-à-dire en les représentant sous forme de séries formelles données par leur développement en série entière (le plus souvent autour d'un point fixe). On cherchera alors une série formelle ϕ^* , qui reste dans l'esprit un biholomorphisme local, donc avec $\phi'(0) \neq 0$.

Cependant, la conjugaison formelle n'entraîne pas la conjugaison analytique ; en effet, le rayon de convergence peut être nul. La conjugaison formelle n'est qu'une condition nécessaire, mais ne donne pas encore de résultats concrets sur la dynamique. Dans la suite, quand ça ne sera pas précisé, la conjugaison sera toujours considérée comme analytique.

Commençons par étudier l'un des comportements les plus simples, avec l'**équation fonctionnelle de Schröder**. Nous cherchons à savoir si l'on peut linéariser la dynamique de f (comme en cours d'équations différentielles), c'est-à-dire s'il existe ϕ qui la conjugue à sa partie linéaire :

$$\phi \circ f = \lambda \phi, \quad \lambda = f'(0).$$

Théorème II.3.2 – Linéarisation formelle. *Une fraction rationnelle f de degré supérieur ou égal à 2 est formellement linéarisable si et seulement si λ n'est ni nul, ni une racine de l'unité.*

Si elle existe, alors cette linéarisation est unique à multiplication par une constante non nulle près.

Remarque : Nous verrons dans la partie III.1 le théorème de Koenigs, qui donne la linéarisation analytique si $|\lambda| \neq 0, 1$. Le cas des points fixes de multiplicateur $|\lambda| = 1$ [†] est plus compliqué, et sera discuté dans III.4. Le problème de la linéarisation analytique autour de ces points fixes est crucial, comme le montre le théorème suivant.

Théorème II.3.3. *Soit f une fraction rationnelle telle que \hat{z} soit un point fixe de multiplicateur $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Alors \hat{z} appartient à $\mathcal{F}(f)$ si et seulement si f est linéarisable au voisinage de \hat{z} .*

Ces deux théorèmes donnent directement que les points fixes dont les multiplicateurs sont une racine de l'unité[‡] sont dans l'ensemble de Julia.

Démonstration (Linéarisation formelle). Commençons par évacuer les cas où la linéarisation est impossible, en procédant par l'absurde. Commençons par remarquer que ϕ est inversible pour la composition en tant que série formelle, car $\phi'(0) \neq 0$.

- Si $\lambda = 0$, alors $\phi \circ f = 0$, et en inversant ϕ on obtient $f = 0$. Contradiction.
- Si $\lambda^q = 1$, alors $\phi \circ f^q = \lambda^q \phi = \phi$, et donc $f^q = Id$. Or ceci est impossible car le degré de f^q est supérieur à $2q$, donc sa représentation en série formelle ne peut pas être l'identité.

*. Une série formelle sur un anneau A est un "polynôme qui ne s'arrête pas", comme une série entière. L'ensemble des séries formelles à coefficients complexes est une \mathbb{C} -algèbre, notée $\mathbb{C}[[X]]$.

†. On verra dans ce sont exactement les points fixes indifférents.

‡. Nous les appellerons plus tard "points fixes paraboliques".

Supposons maintenant que λ n'est ni nul, ni une racine de l'unité.

- **Existence** : Nous cherchons $\phi = \sum_{j \geq 1} b_j X^j$ tel que $\phi \circ f = \lambda \phi$. En réécrivant cela, nous obtenons :

$$\sum_{i \geq 1} b_i \left(\sum_{j \geq 1} a_j X^j \right)^i = \lambda \sum_{i \geq 1} b_i X^i$$

Par unicité des coefficients, on obtient que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$b_i \lambda = \sum_{j=1}^i b_j \left(\sum_{k_1 + \dots + k_j = i} a_{k_1} \dots a_{k_j} \right),$$

que l'on peut réécrire

$$b_i \lambda (1 - \lambda^{i-1}) = \sum_{j=1}^{i-1} b_j \left(\sum_{k_1 + \dots + k_j = i} a_{k_1} \dots a_{k_j} \right),$$

et comme λ n'est ni nul, ni racine de l'unité

$$b_i = \frac{1}{\lambda(1 - \lambda^{i-1})} \sum_{j=1}^{i-1} b_j \left(\sum_{k_1 + \dots + k_j = i} a_{k_1} \dots a_{k_j} \right).$$

Nous avons ainsi une relation de récurrence sur les coefficients, qui nous permet de déterminer entièrement ϕ à condition de connaître les coefficients précédents. Il ne reste qu'à choisir $\phi'(0) = b_1 \in \mathbb{C}^*$, et nous avons une linéarisation formelle.

- **Unicité** : Soient ϕ, ψ deux linéarisations avec $\phi'(0) = b_1, \psi'(0) = c_1 \in \mathbb{C}^*$. Commençons par remarquer qu'une linéarisation est uniquement caractérisée par le choix de son premier coefficient (d'après la relation de récurrence). On remarque aussi que $\frac{c_1}{b_1} \phi$ est encore une linéarisation, et que $(\frac{c_1}{b_1} \phi)'(0) = c_1$. Nous avons ainsi $\frac{c_1}{b_1} \phi = \psi$. □

Démonstration (Théorème II.3.3). Sans perdre de généralité, supposons que $\hat{z} = 0$.

- **Sens direct** : Supposons que f est linéarisable au voisinage de 0. Donc il existe ϕ un biholomorphisme local qui fixe 0 tel que $f \circ \phi(z) = \phi(e^{2i\pi\theta} z)$ au voisinage de 0. Ainsi, pour un disque D suffisamment petit centré en 0, on obtient par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(\phi(D)) \subset \phi(D)$ (car la multiplication par $e^{2i\pi\theta}$ est bijective sur le disque). La famille des itérées $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc uniformément bornée au voisinage sur $\phi(D)$, donc normale d'après le théorème de Montel. Or $\phi(D)$ est un voisinage de 0, donc 0 appartient au Fatou.
- **Sens inverse** : Supposons que 0 appartient à l'ensemble de Fatou. Donc la famille des itérées est normale en l'origine. Par équicontinuité de $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ en 0, il existe $r > 0$ et $M > 0$ tels que

$$|f^n(z)| \leq M \quad \forall z \in D(0, r), n \in \mathbb{N}.$$

Posons maintenant pour tout entier $n \geq 1$:

$$\phi_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi\theta} f^k(z), \quad \forall z \in D(0, r).$$

On a encore que $|\phi_n(z)| \leq M$ sur $D(0, r)$, donc la famille $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est normale sur ce disque d'après le théorème de Montel. De plus, par télescopage :

$$|\phi_n \circ f(z) - e^{2i\pi\theta} \phi_n(z)| = \frac{1}{n} |e^{-2i(n-1)\pi\theta} f^n(z) - e^{2i\pi\theta} z| \leq \frac{2M}{n}.$$

On en déduit que toute limite ϕ d'une sous suite de $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $D(0, r)$ y vérifie l'équation de Schröder $\phi \circ f = e^{2i\pi\theta} \phi$. Comme $\phi'_n(0) = 1$ pour tout entier n , on a aussi $\phi'(0) = 1$. Ainsi c'est un biholomorphisme local, et nous avons bien linéarisé la dynamique au voisinage de 0.

□

III. Etude locale autour des points fixes

Nous cherchons dans cette partie à comprendre comment la dynamique se comporte au voisinage d'un p -cycles. Comme dit précédemment, chaque point de ce p -cycle peut être considéré comme un point fixe de f^p , et dans la suite nous noterons abusivement f à la place de f^p (les ensembles de Fatou et de Julia restent les mêmes).

Plaçons-nous dans un voisinage d'un point fixe et étudions la dynamique locale de notre fraction rationnelle f . Cette dernière s'exprime comme une série entière dans un voisinage du point fixe \hat{z} , qui peut être choisie dans une carte convenable pour que ce dernier corresponde à $\hat{z} = 0$. Nous avons alors : $f(z) = \lambda z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$.

Nous verrons dans la suite que la dynamique est totalement caractérisée par le multiplicateur λ . Nous obtenons alors cinq configurations possibles :

- Super-attractif ($\lambda = 0$),
- Géométriquement attractif ($0 < |\lambda| < 1$),
- Répulsif ($|\lambda| > 1$),
- Rationnellement neutre, souvent appelé point parabolique (λ racine de l'unité),
- Irrationnellement neutre ($|\lambda| = 1$ et n'est pas une racine de l'unité).

Nous verrons dans la partie suivante le lien avec les définitions topologiques. Les quatre premières dynamiques sont totalement comprises, mais le cas des irrationnellement neutres est infiniment plus complexe et résiste encore aux attaques des plus grands mathématiciens...

III.1. Koenigs : points fixes répulsifs et géométriquement attractifs

Nous étudions ici les points fixes de multiplicateur $|\lambda| \neq 0, 1$. Nous verrons à l'aide du théorème suivant qu'il existe une sorte de dualité entre les cas répulsifs et géométriquement attractifs.

Théorème III.1.1 – Linéarisation de Koenigs. *Si $|\lambda| \neq 0, 1$, alors f est analytiquement linéarisable au voisinage du point fixe, c'est-à-dire qu'il existe une solution ϕ à l'équation de Schröder :*

$$\phi \circ f = \lambda \phi.$$

De plus, la coordonnée de Koenigs ϕ est unique à multiplication par une constante non nulle près.

Avant de démontrer ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme III.1.2. *Un point fixe est attractif si et seulement si son multiplicateur vérifie $|\lambda| < 1$.*

Démonstration. • **Sens direct :** On a donc, avec la bonne carte précisée en début de partie, que $0 = f(0)$ et que $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ pour $z \rightarrow 0$. Ainsi, il existe des constantes $r_0 > 0$ et C tels que

$$|f(z) - \lambda z| < C|z^2| \quad \text{pour tout } |z| < r_0$$

Prenons maintenant c tel que $|\lambda| < c < 1$ et $0 < r < r_0$ tel que $|\lambda| + Cr < c$. Nous obtenons ainsi que

$$|f(z)| < |\lambda z| + Cr|z| < c|z|,$$

et donc que

$$|f^{\circ n}(z)| < c^n |z| < c^n r.$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$, nous obtenons la convergence uniforme vers 0 sur \mathbb{D}_{r_0} .

- **Sens inverse** : Si 0 est attractif pour f , alors il existe un petit disque \mathbb{D}_ϵ tel que l'itérée $f^{\circ n}$ envoie \mathbb{D}_ϵ sur un sous ensemble de lui-même. De plus, il ne consiste pas en une rotation autour de l'origine (car elle converge vers la fonction constante égale à p). Nous obtenons alors par le lemme de Schwarz que $|\lambda|^n = |(f^{\circ n})'(0)| < 1$, et donc que $|\lambda| < 1$, comme souhaité. □

Démonstration du théorème de linéarisation de Koenigs.

- **Unicité** : Elle découle de l'unicité de la linéarisation formelle, dans le théorème [II.3.2](#).
- **Existence dans le cas $0 < |\lambda| < 1$** : Soit c une constante telle que $c^2 < |\lambda| < c$. D'après le lemme de caractérisation des points fixes attractifs, on peut choisir un voisinage \mathbb{D}_r de l'origine tel que $|f(z)| \leq c|z|$ pour $z \in \mathbb{D}_r$. Ainsi, pour tout point $z_0 \in \mathbb{D}_r$, l'orbite $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ par f converge géométriquement vers l'origine, avec $|z_n| \leq rc^n$. Or, en passant par le développement en série de Taylor, on sait qu'il existe une constante C telle que $|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2$, et ainsi :

$$|z_{n+1} - \lambda z_n| \leq C|z_n|^2 \leq Cr^2 c^{2n}.$$

En posant $k = \frac{Cr^2}{|\lambda|}$, on obtient que les complexes $w_n = \frac{z_n}{\lambda^n}$ satisfont :

$$|w_{n+1} - w_n| \leq k \left(\frac{c^2}{|\lambda|} \right)^n$$

Comme $\frac{c^2}{|\lambda|} < 1$, cette suite de différences converge uniformément vers zéro. On a donc que les

fonctions holomorphes $z_0 \mapsto w_n(z_0) = \frac{f^n(z_0)}{\lambda^n}$ converge uniformément sur \mathbb{D}_r vers une limite

holomorphe $\phi(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(z_0)}{\lambda^n}$ d'après le théorème de Weierstrass.

Cette fonction vérifie directement que $\phi(f(z)) = \lambda\phi(z)$. De plus, comme pour chaque n , la fonction $z_0 \mapsto w_n(z_0) = \frac{f^n(z_0)}{\lambda^n}$ a pour dérivée à l'origine

$$w'_n(0) = \frac{(f^n)'(0)}{\lambda^n} = \frac{\lambda^n}{\lambda^n} = 1 \neq 0$$

alors la fonction limite a aussi pour dérivée en zéro $\phi'(0) = 1$, et est donc un biholomorphisme local.

- **Existence dans le cas $|\lambda| > 1$:** Le résultat découle du cas précédent, appliqué à la fonction f^{-1} , qui peut être définie comme une fonction holomorphe dans un voisinage de zéro. En effet, comme $f'(0) = \lambda \neq 0$, on sait que f est un biholomorphisme local. De plus, on a par le théorème de dérivation des fonctions réciproques que $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\lambda}$. Le multiplicateur de f^{-1} est donc de module $0 < \frac{1}{|\lambda|} < 1$.

□

Illustrons l'utilité de la linéarisation de Koenigs pour démontrer le lemme suivant. L'intuition géométrique est donnée par la figure 2.

Lemme III.1.3. *Un point fixe est répulsif si et seulement si son multiplicateur vérifie $|\lambda| > 1$.*

Remarque : Combiné avec la caractérisation des points fixes attractifs, ce lemme donne par élimination que les points fixes indifférents sont ceux où $|\lambda| = 1$. Ces caractérisations des points fixes en dynamique holomorphe est remarquable, car elle est fautive dans le cas des fonctions réelles. Par exemple la fonction $f : x \mapsto x \pm x^3$ admet 0 comme point fixe, de multiplicateur $\lambda = 1$, et peut être attractif ou répulsif.

De plus, nous obtenons une équivalence forte utile : un point fixe est répulsif si et seulement si il est géométriquement attractif pour f^{-1} (c'est-à-dire géométriquement attractif dans le passé), et vice-versa. Ce résultat ne découle pas de la définition topologique, car la dynamique dans le passé n'est pas toujours définie pour un système dynamique quelconque.

Démonstration. • **Sens inverse :** Si $|\lambda| > 1$, alors la dynamique est linéarisable d'après le théorème de Koenigs. Donc il existe \mathcal{U} un voisinage de 0 et ϕ un biholomorphisme local qui linéarise f sur \mathcal{U} :

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(\omega) = \lambda \omega \quad \forall \omega \in \mathcal{U}$$

Quitte à réduire, on peut prendre $\mathcal{U} = B(0, r)$. Soit $\delta > 0$ tel que $|\lambda|\delta < r$. On a que pour tout $0 < |\omega| < \delta$, il existe $n = n(\omega)$ tel que $\delta < |\lambda^n \omega| < r$.

Posons maintenant $\mathcal{V} = \phi^{-1}(B(0, \delta))$ qui est encore un voisinage de 0, car ϕ est un biholomorphisme. En opérant le changement de coordonnées $z = \phi^{-1}(\omega)$, on obtient que l'orbite de z par f sort au temps n :

$$f^{nz}(z) = \phi^{-1}(\lambda^n \phi(z)) \notin \mathcal{V}$$

Donc toutes les orbites différentes du point fixe sortent de \mathcal{V} , et donc 0 est bien un point fixe répulsif.

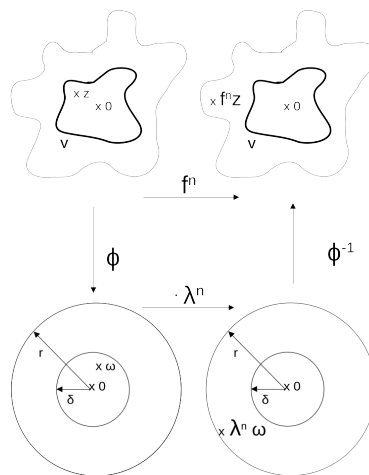


FIGURE 2 – Utilisation des coordonnées de Koenigs autour d'un point fixe répulsif.

- **Sens direct** : On cherche ici, une fois n'est pas coutume, à appliquer le lemme de Schwarz. Cependant, nous devons pour cela nous trouver dans le bon cadre, c'est-à-dire trouver un voisinage tel que f^{-1} envoie un disque topologique sur un sous ensemble plus petit, ce qui n'est pas chose facile...

Soit \hat{z} un point fixe répulsif de f . Comme ce point fixe ne peut être attractif et répulsif à la fois, on sait que $|\lambda| \geq 1$. Prenons alors \mathcal{N} un voisinage répulsif compact de \hat{z} , assez petit pour que \mathcal{N} s'envoie homéomorphiquement* sur $f(\mathcal{N})$, un autre voisinage compact de \hat{z} . Posons maintenant :

$$\mathcal{N}_k = \mathcal{N} \cap f^{-1}(\mathcal{N}) \cap \dots \cap f^{-k}(\mathcal{N})$$

qui est un voisinage compact de 0 contenant tous les points dont les k premières itérées appartiennent toutes à \mathcal{N} . On a donc $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \supset \mathcal{N}_1 \supset \dots$, et l'intersection décroissante des \mathcal{N}_k vaut \hat{z} car \mathcal{N} est un voisinage répulsif. Par compacité, on obtient que le diamètre de \mathcal{N}_k doit tendre vers 0 pour $k \mapsto \infty$. Or par construction :

$$f(\mathcal{N}_k) = \mathcal{N}_{k-1} \cap f(\mathcal{N})$$

Comme le diamètre de \mathcal{N}_k tend vers 0, on a que $\mathcal{N}_{k-1} \subset f(\mathcal{N})$ à partir d'un certain rang. On a donc $f(\mathcal{N}_k) = \mathcal{N}_{k-1}$, et même que f est un homéomorphisme de \mathcal{N}_k vers \mathcal{N}_{k-1} .

Soit maintenant \mathcal{U}_k la composante connexe de l'intérieur de \mathcal{N}_k contenant \hat{z} . On a donc que f^{-1} est un biholomorphisme entre \mathcal{U}_{k-1} et l'ensemble strictement plus petit \mathcal{U}_k . Or comme \mathcal{U}_k est simplement connexe† et borné, alors par le théorème d'uniformisation de Riemann elle est conformément équivalente au disque unité. Par le lemme de Schwarz, $|\lambda^{-1}| < 1$ et donc $|\lambda| > 1$. □

La linéarisation locale nous donne déjà des informations plus globales sur $\mathcal{F}(f)$, comme montre le corollaire suivant. Nous verrons aussi dans la partie IV.2 pourquoi l'ensemble de Julia n'est presque jamais lisse.

Corollaire III.1.4 – Linéarisation globale. *Si \hat{z} un point fixe géométriquement attractif, alors f est linéarisable sur tout le bassin d'attraction \mathcal{A} de \hat{z} . Le bassin immédiat \mathcal{A}^{imm} est alors appelé **domaine de Schröder**.*

Démonstration. Ce résultat n'est que le prolongement des coordonnées de Koenigs. En effet, pour calculer $\phi(z)$ pour $z \in \mathcal{A}$, il suffit de suivre l'orbite de z jusqu'à obtenir un $f^k(z)$ dans un voisinage de \hat{z} où Koenigs a linéarisé la dynamique, puis d'évaluer sa coordonnée de Koenigs $\phi(f^k(z))$ et de multiplier par λ^{-k} . □

III.2. Böttcher et la super-attraction

Cette section est consacrée aux points fixes super-attractifs, c'est-à-dire pour lesquels $\lambda = 0$ ‡. Pour un tel point, qu'on considère comme étant l'origine, la fonction s'écrit localement sous la forme

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots,$$

*. Ce qui est possible car $f'(0) = \lambda \neq 0$. Ce transfert n'est pas biholomorphe, car \mathcal{N} n'est pas ouvert.

†. Car sinon \mathcal{N}_k ne serait pas compact.

‡. C'est en particulier des points critiques de f .

avec $k \geq 2$ et $a_k \neq 0$, où k est appelé **degré local**.

Théorème III.2.1 – Böttcher, 1904. *La dynamique au voisinage d'un point fixe super-attractif ($\lambda = 0$) est conjuguée selon l'équation de Böttcher :*

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = w^k.$$

De plus, la **coordonnée de Böttcher** ϕ est unique à multiplication par une $(k - 1)$ ème racine de l'unité près.

Remarque : Comme dans la partie précédente, cette linéarisation peut se prolonger à tout le bassin de super-attraction. Le bassin immédiat est appelé **domaine de Böttcher**.

Ce théorème a de nombreuses applications dans l'étude des dynamiques polynomiales. En effet, chaque fonction polynomiale sur \mathbb{C} de degré $d \geq 2$ se prolonge comme une fraction rationnelle sur $\widehat{\mathbb{C}}$ avec l'infini comme point fixe super-attractif, de degré local $k = d$.

Cependant, il ne nous sera pas utile dans la suite, et nous renvoyons à [Mil.] et [Stein.] pour des preuves.

III.3. Points fixes paraboliques et fleurs de Leau-Fatou

Commençons ici à nous intéresser aux points fixes neutres, premièrement avec le cas plus facile de ceux dits rationnels.

Définition III.3.1 – Point fixe parabolique. Un point fixe est dit **parabolique** si λ est une racine de l'unité (il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^q = 1$) et que $f^q \neq Id^*$. Dans ce cas, on peut écrire $f(z) = \lambda z + az^{n+1} + \dots$, où $a \neq 0$. L'entier $n + 1 \geq 2$ est appelé la **multiplicité** du point fixe.

Remarque importante : Comme les itérés de f ont toutes les mêmes ensembles de Julia et de Fatou, on se ramène dans la suite à l'étude du cas $\lambda = 1$, via f^q . Plus de détails seront donnés dans la preuve du lemme III.3.4.

La dynamique autour de tels points fixes n'est jamais linéarisable, d'après le théorème II.3.2. Nous pouvons tout de même nous consoler de cette déception, grâce au très esthétique théorème des fleurs de Leau-Fatou. Ce dernier décrit une dynamique juste un peu plus compliquée (mais aussi plus belle), qu'on peut *linéariser paraboliquement* dans certaines zones que nous appellerons pétales, selon l'équation d'Abel :

$$\alpha(f(z)) = 1 + \alpha(z)$$

La fonction α est alors appelée **coordonnée de Fatou**.

La figure 3 montre une telle fleur parabolique, associée au rationnel $\frac{3}{7}$. Certaines directions sont privilégiées, ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition III.3.2. Un nombre complexe v est appelé **vecteur répulsif** de f à l'origine si $nav^n = 1$, et **vecteur attractif** si $nav^n = -1$.

*. Ce qui est toujours le cas pour des fractions rationnelles de degré au moins 2.

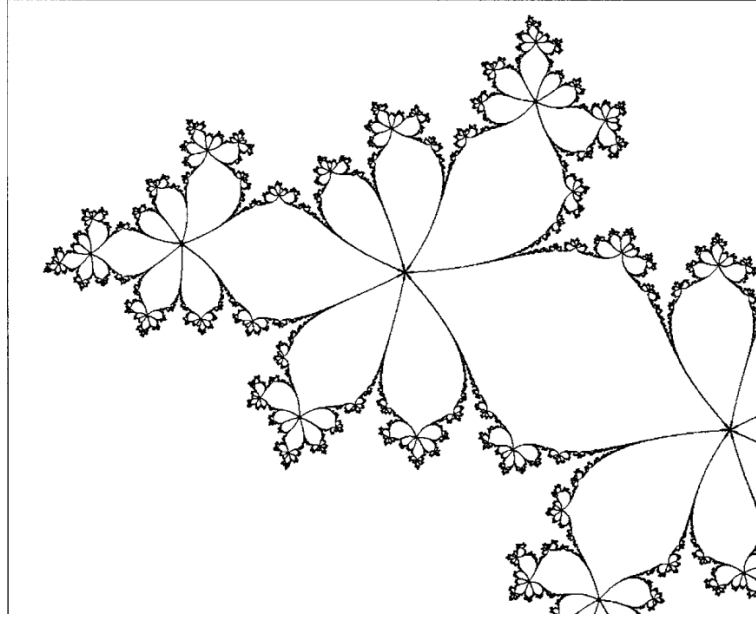


FIGURE 3 – Ensemble de Julia pour $z \mapsto z^2 + e^{2i\pi\frac{3}{7}}z$. (Crédit : John Milnor, [Mil].)

Il y a donc n vecteurs attractifs également espacés, séparés par n vecteurs répulsifs aussi également espacés. On peut donc nommer ces vecteurs $v_0, v_1, \dots, v_{2n-1}$, où v_0 est répulsif et avec

$$v_j = e^{\frac{i\pi j}{n}} v_0 \quad \text{tel que} \quad n a v_j^n = (-1)^j.$$

Le vecteur v_j est répulsif ou attractif selon si j est pair ou impair.

Remarque : Ce nombre complexe v doit être intuitivement vu comme un vecteur qui donne la direction de la dynamique locale dans le pétale correspondant (voir figure 5).

Notons que la fonction inverse f^{-1} est bien définie et holomorphe au voisinage de 0 (par le théorème d'inversion locale), et que les vecteurs répulsifs de f sont les vecteurs attractifs de f^{-1} (c'est-à-dire pour f dans le passé).

On dit qu'une orbite $f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ **converge non trivialement** vers 0 si $z_k \rightarrow 0$ mais que aucun des z_k ne vaut 0. Le lemme suivant décrit leurs dynamiques.

Lemme III.3.3 – Convergence non triviale. *Si une orbite $f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ converge non trivialement vers 0, alors il existe un vecteur attractif v_j tel que z_k est asymptotique à $\frac{v_j}{\sqrt[k]{k}}$. En d'autres termes, la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} z_k$ existe, et est égale à un v_j avec j impair. On dit alors que l'orbite $\{z_k\}$ converge vers 0 dans la direction de v_j .*

De même, si $f^{-1} : z'_0 \mapsto z'_1 \mapsto \dots$ converge non trivialement vers 0, alors cela se fait dans la direction de l'un des v_j avec j pair.

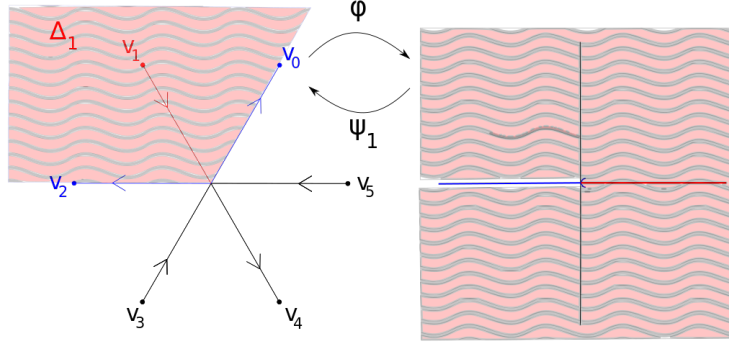


FIGURE 4 – Transformation d'un secteur.

Démonstration. La démonstration n'est pas évidente, et se comprend mieux avec la figure 4. Elle se base sur le changement de coordonnées locales :

$$w = \varphi(z) = \frac{c}{z^n} \quad \text{où } c = \frac{-1}{na}.$$

Remarquons déjà que $\varphi(v_j) = (-1)^{j+1}$. Nous nous intéressons aux cas où $|z| > 0$ est petit, donc $|w|$ est grand.

La demi droite \mathbb{R}_+v_j sera appelée rayon attractif ou répulsif selon si j est impair ou pair. Comme la "fonction" $\varphi^{-1}(w) = \sqrt[n]{\frac{c}{w}}$ est multi-valuée n fois, séparons \mathbb{C}^* en secteurs afin de pouvoir exprimer aisément une branche de φ^{-1} .

Notons Δ_j l'ouvert d'angle $\frac{2\pi}{n}$ bordé par les rayons \mathbb{R}_+v_{j-1} et \mathbb{R}_+v_{j+1} .* Ces $2n$ secteurs recouvrent \mathbb{C}^* (ils s'intersectent, mais n'ayons pas peur de la redondance) . On a de plus que φ envoie biholomorphiquement Δ_j sur un plan coupé :

$$\varphi(\Delta_j) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{(-1)^j}$$

Ainsi, nous pouvons définir une branche $\psi_j : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{(-1)^j} \xrightarrow{\cong} \Delta_j$ de φ^{-1} . Notons que chaque $\Delta_j \cap \Delta_{j+1}$ est un secteur d'angle $\frac{\pi}{n}$ bordé par les rayons \mathbb{R}_+v_j et \mathbb{R}_+v_{j+1} . L'image $\varphi(\Delta_j \cap \Delta_{j+1})$ est le demi-plan supérieur si j est pair, et le demi-plan inférieur sinon.

Pour comprendre le comportement de f pour z proche de 0 dans le secteur Δ_j , intéressons nous à la transformation suivante :

$$w \mapsto F_j(w) = \varphi \circ f \circ \psi_j(w)$$

qui est définie en dehors d'un grand disque dans le w -plan coupé et qui est à valeurs dans le w -plan entier. Comme on a que $f(z) = z(\lambda + az^n + o(z^n))$ pour $z \rightarrow 0$, on obtient :

$$f \circ \psi_j(w) = \sqrt[n]{\frac{c}{n}} \left(1 + a \frac{c}{w} + o\left(\frac{1}{w}\right) \right), \quad |w| \rightarrow \infty.$$

En composant par $\varphi(z) = \frac{c}{z^n}$, on obtient :

$$F_j(w) = w \left(1 + a \frac{c}{w} + o\left(\frac{1}{w}\right) \right)^{-n} = w \left(1 + \frac{-nac}{w} + o\left(\frac{1}{w}\right) \right).$$

*. Plus formellement, $\Delta_j = \{re^{i\theta}v_j | r > 0, \theta \in]\frac{-\pi}{n}, \frac{\pi}{n}[\}$.

Comme $nac = -1$, nous pouvons réécrire cela plus simplement :

$$F_j(w) = w + 1 + o(1), \quad |w| \rightarrow \infty. \quad (*1)$$

Ainsi, il existe $R > 0$ assez grand tel que

$$|F_j(w) - w - 1| < \frac{1}{2}, \quad |w| > R. \quad (*2)$$

En particulier, on obtient de cette équation que

$$\Re(F_j(w)) > \Re(w) + \frac{1}{2}, \quad |w| > R \quad (*3)$$

et donc que la fonction φ satisfait pour $|z|$ assez petit

$$\Re(\varphi(f(z))) > \Re(\varphi(z)) + \frac{1}{2}. \quad (*4)$$

Posons maintenant le demi-plan $\mathbb{H}_R = \{\Re(w) > R\}$, et son image $\mathcal{P}_j(R) = \psi_j(\mathbb{H}_R)$, c'est-à-dire tous les points $z \in \Delta_j$ tels que $\Re(\varphi(z)) > R$. D'après (*3), on voit que F_j envoie \mathbb{H}_R dans lui-même (car $F_j(\mathbb{H}_R) \subset \mathbb{H}_{R+\frac{1}{2}}$), et que f envoie aussi $\mathcal{P}_j(R)$ dans lui-même, car

$$f(\mathcal{P}_j(R)) = f \circ \psi_j(\mathbb{H}_R) = \psi_j \circ F_j(\mathbb{H}_R) \subset \psi_j(\mathbb{H}_R) = \mathcal{P}_j(R). \quad (*5)$$

De plus, les itérées de f restreintes à $\mathcal{P}_j(R)$ convergent uniformément vers la fonction nulle ; en effet on a par (*4) que pour $z \in \mathcal{P}_j(R)$

$$\left| \frac{c}{f^k(z)} \right|^n \geq \Re(\varphi(f^k(z))) > R + \frac{k}{2},$$

et donc

$$|f^k(z)|^n < \frac{2|c|}{k + 2R} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0.$$

Dans la suite, $\mathcal{P}_j(R)$ sera nommé pétale attractif (voir définition III.3.5).

Soit $f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ qui converge non trivialement vers 0. On a pour des rangs assez grands k que $\Re(\varphi(z_{k+1})) > \Re(\varphi(z_k)) + \frac{1}{2}$ (d'après (*4)). On en déduit qu'il existe un entier m tel que $\Re(\varphi(z_m)) > R$. Ce z_m doit appartenir à l'un des pétales $\mathcal{P}_j(R) \subset \Delta_j$. Comme $f(\mathcal{P}_j(R)) \subset \mathcal{P}_j(R)$, alors tous les z_k appartiennent au même pétale $\mathcal{P}_j(R)$ pour $k \geq m$.

Considérons maintenant la suite des $w_k = \varphi(z_k)$. Alors pour $k \geq m$, $w_k \in \mathbb{H}_R$ et $w_{k+1} = F_j(w_k)$. Comme $\Re(w_k) \rightarrow \infty$ et donc $|w_k| \rightarrow \infty$, on obtient par (*1) que la différence $w_{k+1} - w_k$ converge vers 1 pour $k \rightarrow \infty$. Par le lemme de Cesaro, la moyenne

$$\frac{w_k - w_0}{k} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (w_{l+1} - w_l)$$

*. Refaire la figure 6 en plaçant \mathbb{H}_R peut aider à la compréhension.

converge aussi vers 1. Ainsi, le ratio $\frac{w_k}{k}$ converge aussi vers 1, autrement dit $w_k \sim k$ pour $k \rightarrow \infty$. Comme $\frac{1}{w_k} = -naz_k^n$, on obtient que naz_k^n est asymptotiquement équivalent à $\frac{-1}{k}$, et comme $nav_j^n = -1$, on obtient que $z_k^n \sim \frac{v_j^n}{k}$.

Pour finir, il suffit d'extraire la racine n -ième, et comme z_k appartient au pétale $\mathcal{P}_j(R)$ alors $z_k \sim \frac{v_j}{\sqrt[n]{k}}$, ce qui conclut la preuve de ce lemme. \square

Revenons maintenant au cas d'un multiplicateur $\lambda = e^{2i\pi\frac{p}{q}}$, où la fraction est irréductible.

Lemme III.3.4. *Si le multiplicateur d'un point fixe parabolique \hat{z} est une racine primitive q -ième de l'unité, alors le nombre n de vecteurs attractifs de \hat{z} est un multiple de q .*

Démonstration. Soit v un vecteur attractif pour f^q en \hat{z} et une orbite $z_0 \mapsto z_q \mapsto z_{2q} \dots$ sous f^q qui converge vers \hat{z} dans la direction de v . Donc comme $f(z) \sim \hat{z} + \lambda z$ au voisinage de \hat{z} , on a que $z_1 \mapsto z_{q+1} \mapsto z_{2q+1} \dots$ converge vers \hat{z} dans la direction de λv . Comme λ est une racine primitive q -ième, les $v, \lambda v, \dots, \lambda^{q-1}v$ sont distincts, et donc n est un multiple de q . \square

Définition III.3.5 – Pétales. Soit \hat{z} un point fixe de multiplicité $n + 1 \geq 2$, N un voisinage de \hat{z} tel que f y est injective, et v_j un vecteur attractif. Un ouvert $\mathcal{P} \subset N$ sera appelé **pétale attractif** pour f et v_j en \hat{z} si

- f envoie \mathcal{P} sur lui-même,
- une orbite $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$ par f est absorbée par \mathcal{P} si et seulement si elle converge vers \hat{z} dans la direction de v_j .

De même, si $f : N \xrightarrow{\cong} N'$, alors un ouvert $\mathcal{P} \subset N'$ sera appelé **pétale répulsif** pour le vecteur répulsif v_k si \mathcal{P} est un pétale attractif pour $f^{-1} : N' \rightarrow N$ et pour le vecteur v_k .

Remarque : Le concept de pétale n'a pas de définition standard et dépend des auteurs. Il existe notamment une définition plus ensembliste, que l'on trouve dans [Bert.May.] : un ouvert connexe \mathcal{P} tel que $\bar{\mathcal{P}} \subset N \cap N'$ est un pétale attractif pour f si

$$f(\bar{\mathcal{P}}) \subset \mathcal{P} \cup \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{k \geq 0} f^k(\bar{\mathcal{P}}) = \{0\}.$$

Ceci ne fait pas intervenir des équivalents asymptotiques pour les orbites qui convergent selon v_j , et nous avons préféré prendre la définition de [Mil.] pour une compréhension plus quantitative.

Plusieurs pétales existent pour un même v_j , mais avec notre définition, il existe pour un voisinage N un pétale maximal pour v_j , qui est l'union des orbites dans N qui convergent vers \hat{z} dans la direction de v_j .

Nous arrivons maintenant au théorème central de cette partie.

Théorème III.3.6 – Théorème des Fleurs Paraboliques. *Soit \hat{z} un point fixe parabolique multiplicité $n + 1 \geq 2$. Alors pour tout voisinage de ce point, il existe des pétales simplement connexes \mathcal{P}_j (où j parcourt les entiers modulo $2n$) qui sont répulsifs ou attractifs selon si j est pair ou impair. De plus, ces pétales peuvent être choisis tels que l'union*

$$\{\hat{z}\} \cup \mathcal{P}_0 \cup \dots \cup \mathcal{P}_{2n-1}$$

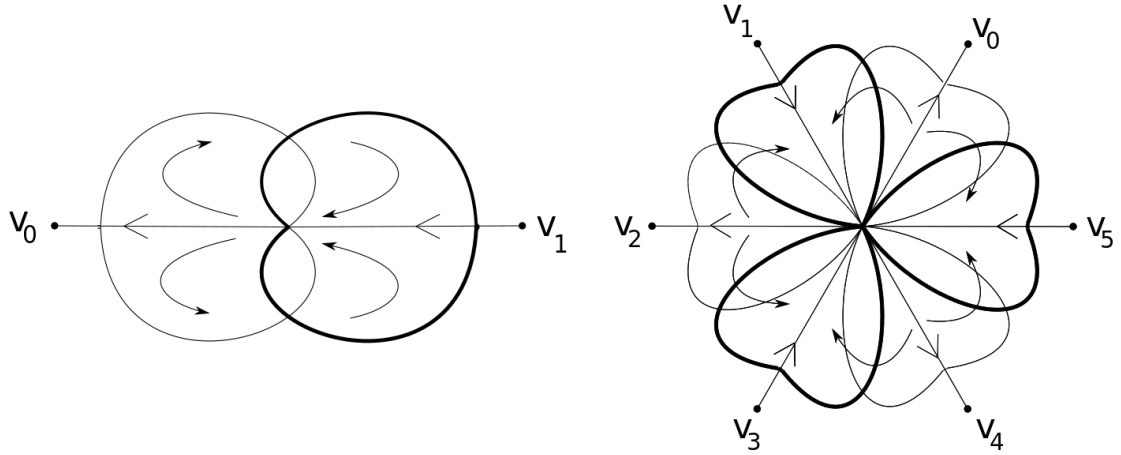


FIGURE 5 – Fleurs de Leau-Fatou, pour $n = 1$ et $n = 3$. Les pétales attractifs sont en gras.

forme un voisinage ouvert de \hat{z} . Quand $n > 1$, chaque \mathcal{P}_j intersecte ses deux voisins immédiats tel que les régions $\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_{j\pm 1}$ soient simplement connexes*, mais reste disjoint de tous les autres \mathcal{P}_k .

Le cas $n = 1$ est légèrement différent, car il n'y a que deux pétales \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 . Pour eux, le voisin de gauche est aussi le voisin de droite, et l'intersection $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1$ a alors deux composantes simplement connexes (voir figure 5).

Démonstration. Cette preuve fait plusieurs fois référence à celle du lemme III.3.3 pour construire explicitement de tels pétales. La figure 6 est particulièrement utile pour la compréhension. Supposons que $\hat{z} = 0$. Prenons R assez grand (comme dans (*3)), et posons

$$W_R = \{w = u + iv \mid u + |v| > 2R\} (\supset \mathbb{H}_{2R}).$$

Considérons d'abord la cas attractif (j impair). En utilisant (*2), on obtient en faisant un dessin que F_j envoie W_R dans lui-même car $F_j(W_R) \subset W_{R+\frac{1}{2}} \subset W_R$, et que f envoie $\mathcal{P}_j = \psi_j(W_R) \subset \Delta_j$ dans lui-même aussi (pour la même raison que (*5)). En procédant comme dans la preuve du lemme, on obtient que \mathcal{P}_j est un pétale. Cependant, il n'y a plus de convergence uniforme, et celui-là est en forme de coeur comme sur la figure 5.

Considérons maintenant le cas répulsif (j pair), et procédons de même avec $-W_R = \{w \mid -w \in W_R\}$ et F_j^{-1} . On obtient que \mathcal{P}_j est un pétale répulsif.

L'intersection $W_R \cap (-W_R)$ est alors l'union disjointe $V_R^+ \cup V_R^-$. On a donc que $\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_{j+1}$ est $\psi_j(V_R^+)$ ou $\psi_j(V_R^-)$ selon si j est pair ou impair, donc l'intersection est bien simplement connexe. Les autres intersections sont vides car les secteurs Δ_k ne rencontrent pas Δ_j ($k \neq j \pm 1$).

Nous avons donc construit les pétales voulus. □

*. Ces régions sont parfois appelées sépales.

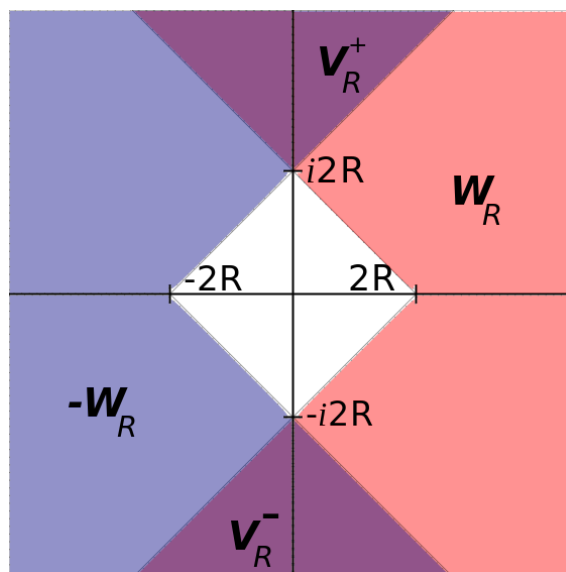


FIGURE 6 – Regard sous les coordonnées locales $w = \varphi(z)$.
Les pétales sont $\pm W_R$ et les sépales sont V_R^\pm .

Théorème III.3.7 – Linéarisation parabolique. *Pour un pétale \mathcal{P} attractif ou répulsif, il existe un unique (à addition par une constante près) changement de coordonnées locales α qui satisfait l'équation d'Abel*

$$\alpha(f(z)) = 1 + \alpha(z)$$

pour tout $z \in \mathcal{P} \cap f^{-1}(\mathcal{P})$. Ce α est appelé **coordonnée de Fatou** de \mathcal{P} .

Dans le cas attractif, cette linéarisation parabolique est prolongeable à tout le bassin d'attraction \mathcal{A} associé au pétale \mathcal{P} . Le bassin immédiat \mathcal{A}^{imm} est appelé **domaine de Leau**.

La preuve de ce théorème est longue et nécessite plusieurs lemmes, donc ne sera pas présente dans ce document (voir [Mil.] pour les détails).

III.4. Irrationnelle indifférence...

Cette section s'intéresse au cas où $\lambda = e^{2i\pi\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Cette dernière catégorie est de loin la plus compliquée, et n'est toujours pas complètement comprise à ce jour. Les théorèmes seront juste énoncés, mais sans preuves.

La question de la linéarisation y est cruciale, car le théorème II.3.3 donne l'équivalence entre appartenir à $\mathcal{F}(f)$ et être localement linéarisable. La linéarisation revient ici à conjuguer f par une rotation d'un angle irrationnel θ dit *nombre de rotation*.

Définition III.4.1. On dira qu'un point fixe irrationnellement indifférent est un **point de Siegel** si la linéarisation locale est possible, et un **point de Cremer** sinon*. Une composante de $\mathcal{F}(f)$ sur

*. les noms proviennent des mathématiciens qui ont prouvé leur existence.

laquelle f est conjugué à une rotation d'angle irrationnel du disque unité est appelé **disque de Siegel**, et l'unique point fixe \hat{z} qu'elle contient est appelé son **centre**.

Nous donnerons dans la suite des théorèmes assurant des conditions suffisantes de linéarisations/impossibilité de linéarisation. Cependant, il n'y a pas encore de condition nécessaire, ce qui empêche de clôturer la question.

Nous allons voir qu'un critère crucial de linéarisation est la qualité de l'approximation de le nombre de rotation θ par des rationnelles (qu'on appelle "approximation diophantienne"), qui est en lien avec le comportement de la quantité $|\lambda^q - 1|$ qui apparait dans la linéarisation formelle.

Heuristiquement, si l'approximation diophantienne est "bonne", alors la quantité va "trop tendre vers 0", et comme elle se trouve au dénominateur, cela va entraîner un phénomène de résonance (comme en physique, voir [Mil.] pour plus de détails) qui empêche toute linéarisation analytique.

Théorème III.4.2 – Critère de non-linéarisabilité de Cremer, 1927. *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. Si la suite*

$$\sqrt[d^q]{\frac{1}{|\lambda^q - 1|}}$$

n'est pas bornée pour $q \rightarrow \infty$, alors f n'est pas linéarisable. (La condition traduit que θ est "bien approximable par des rationnels".)

Passons maintenant aux différents théorèmes qui donnent des critères, plus ou moins compliqués, de linéarisation.

Un nombre pour lequel cette approximation est "mauvaise" est dit diophantien.

Définition III.4.3. Un nombre réel θ est dit **diophantien** si il existe $C > 0$ et $2 < \mu < \infty$ tels que $\forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^\mu}.$$

Théorème III.4.4 – Critère de linéarisation de Siegel, 1942. *Si le nombre de rotation θ du multiplicateur λ est diophantien, alors f est linéarisable.*

Il existe un critère de linéarisation encore plus pointu, qui fait intervenir le développement en fraction continue de l'irrationnel θ , qu'on peut prendre dans $]0, 1[$. Un résultat d'approximation diophantienne dit que

$$\theta = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

où $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers positifs définie de manière unique.

Si on tronque cette approximation à un rang n , on obtient une approximation rationnelle de θ appelée

réduite d'indice n :

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}},$$

qui joue un rôle crucial dans le théorème suivant.

Théorème III.4.5 – Critère de linéarisation de Brjuno-Rüssmann, 1965. Soit $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ et $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ les réduites du développement en fraction continue de θ . Si θ est un **nombre de Brjuno**, c'est-à-dire qu'il vérifie

$$\sum_n \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} < \infty,$$

alors f est linéarisable.

Ce résultat est optimal, comme l'a montré Yoccoz en 1988 en donnant un exemple explicite de fonction qui n'est pas linéarisable si la condition n'est pas satisfaite.

Théorème III.4.6. Réciproquement, si θ n'est pas un nombre de Brjuno (ie. la somme diverge), alors $f : z \mapsto e^{2i\pi\theta}z + z^2$ a un point fixe à l'origine qui n'est pas linéarisable.

Ce dernier théorème est toujours l'objet d'études. Douady a notamment conjecturé que si θ n'est pas un nombre de Brjuno, alors le théorème précédent reste vrai pour toute fraction rationnelle de degré supérieur.

IV. Conséquences à l'échelle globale

Il ne nous reste plus qu'à cueillir les fruits tendus par l'étude locale. Nous obtenons de juteux résultats sur la structure des ensembles de Julia et de Fatou.

IV.1. Densité des points périodiques répulsifs

Le but principal de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème IV.1.1. *Soit f une fraction rationnelle de degré au moins 2. Les cycles répulsifs forment une partie dense de l'ensemble de Julia de f .*

Dans un premier temps, on cherche à montrer que f possède forcément un point fixe répulsif ou parabolique. On introduit pour cela la quantité suivante :

Définition IV.1.2. Soit \hat{z} un point fixe de f . Le **résidu de point fixe** de f en \hat{z} est donné par :

$$\iota(f, \hat{z}) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{dz}{z - f(z)}$$

où l'intégrale est réalisée sur un cercle entourant \hat{z} et aucun autre point fixe de f .

On peut en réalité calculer ce résidu de point fixe $\iota(f, \hat{z})$ à l'aide du multiplicateur λ de f en \hat{z} .

Lemme IV.1.3. *Si $\lambda \neq 1$, on a l'égalité*

$$\iota(f, \hat{z}) = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Démonstration. Quitte à conjuguer f par une transformation de Möbius, on peut supposer $\hat{z} = 0$. La fonction f s'écrit alors sous la forme

$$f(z) = \lambda z + \sum_{i \geq 2} a_i z^i.$$

Ainsi $z - f(z) = z(1 - \lambda)(1 + O(z))$, et, comme $\lambda \neq 1$, on a :

$$\frac{1}{z - f(z)} = \frac{1 + O(z)}{(1 - \lambda)z} = \frac{1}{(1 - \lambda)z} + O(1)$$

En calculant alors cette intégrale sur un cercle de rayon $\epsilon > 0$ assez petit, le théorème des résidus nous donne bien :

$$\iota(f, \hat{z}) = \frac{1}{1 - \lambda}$$

.

□

L'intérêt du résidu de point fixe réside dans cette relation remarquable :

Proposition IV.1.4. *Si $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ n'est pas l'identité,*

$$\sum_{z=f(z)} \iota(f, z) = 1.$$

Démonstration. Quitte à conjuguer par une transformation de Möbius, on peut supposer que $f(\infty)$ n'est ni 0, ni ∞ . Comme $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{1}{z - f(z)} - \frac{1}{z} = \frac{f(z)}{z(z - f(z))} \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f(\infty)}{z^2}.$$

Ainsi, cette différence tend vers 0 lorsque $z \rightarrow \infty$. Alors, pour r suffisamment grand, on a, par le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{dz}{z - f(z)} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{dz}{z} = 1,$$

ce qui montre bien l'égalité recherchée. \square

Supposons que f ne possède de points fixes ni répulsifs, ni paraboliques de multiplicateur 1. Si on note d son degré, f possède alors $d + 1$ points fixes distincts* attractifs ou neutres. Notons λ le multiplicateur d'un tel point fixe, on a alors :

$$|\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \bar{\lambda} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \Re \left(\frac{1}{1 - \lambda} \right).$$

Et ainsi, on a :

$$\Re \left(\sum_{z=f(z)} \iota(f, z) \right) \geq \frac{d+1}{2} > 1.$$

où l'on a pu écrire la dernière inégalité car $d \geq 2$ par hypothèse. Cela rentre en contradiction avec la proposition [IV.1.4](#) : f possède nécessairement au moins un point fixe répulsif ou parabolique de multiplicateur 1.

Choisissons un de ces points fixes z_0 , qui appartient à $\mathcal{J}(f)$, et \mathcal{U} un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$ intersectant $\mathcal{J}(f)$ mais disjoint de z_0 . On cherche alors à construire une orbite dite **homocline** pour z_0 , c'est-à-dire une suite de points $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- $\forall k \in \mathbb{N}, f(z_k) = z_{k-1}$;
- la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k$ existe et vaut z_0 .

Une telle orbite homocline existe bien. D'après le corollaire [II.2.13](#), on sait qu'il existe un entier $r > 0$ et un point $z_r \in \mathcal{J}(f) \cap \mathcal{U}$ tel que :

$$f^r(z_r) = z_0.$$

Soit \mathcal{N} un voisinage quelconque de z_0 ; en utilisant à nouveau l'argument précédent, on peut trouver $z_q \in \mathcal{J}(f) \cap \mathcal{N}$ tel que $f^{q-r}(z_q) = z_r$.

Dans un premier temps, supposons que z_0 soit un point fixe répulsif. D'après le théorème de linéarisation de Koenigs [III.1.1](#), il existe un voisinage \mathcal{N} de z_0 , assez petit pour ne pas contenir z_r , et sur lequel on peut linéariser la dynamique. Ainsi, on va pouvoir choisir des préimages de z_q

$$\cdots \mapsto z_j \mapsto z_{j-1} \mapsto \cdots \mapsto z_{q-1} \mapsto z_q$$

*. Les points fixes sont bien distincts, car pour avoir un point fixe d'ordre supérieur à 1, celui-ci devrait avoir un multiplicateur égal à 1, ce qui n'est pas possible par hypothèse.

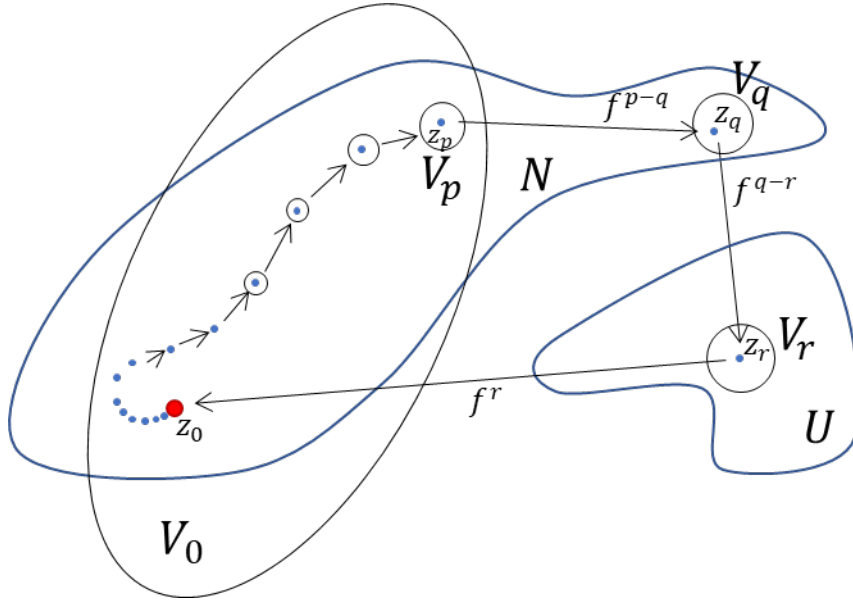


FIGURE 7 – Schéma d’une orbite homocline, et des différents objets mis en jeu dans la démonstration.

qui appartiennent toutes à \mathcal{N} . De plus, la suite $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers z_0 . On a bien construit une orbite homocline.

Supposons de plus qu’aucun des points de l’orbite homocline $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ n’est un point critique de f . On peut alors trouver un disque ouvert \mathcal{V}_q autour de z_q tel que f^q envoie \mathcal{V}_q sur un voisinage \mathcal{V}_0 de z_0 de manière difféomorphe. De plus, si on pose :

$$\mathcal{V}_r := f^{(q-r)}(\mathcal{V}_q),$$

quitte à réduire \mathcal{V}_q , on peut supposer $V_r \subset \mathcal{U}$. Alors, si pour tout $j \geq q$, on prend pour \mathcal{V}_j la composante connexe de $(f^{-1})^{(j-q)}(\mathcal{V}_q)$ contenant z_j , on obtient une suite de voisinages qui se contractent et qui se rapprochent de z_0 (car z_0 est un point fixe répulsif). En particulier, pour p assez grand, $\bar{\mathcal{V}}_p \subset \mathcal{V}_0$. Autrement dit, f^{-p} envoie biholomorphiquement l’ouvert simplement connexe \mathcal{V}_0 dans son sous-ensemble compact $\bar{\mathcal{V}}_p$. D’après le lemme de Schwarz-Pick, comme f^p (en tant que fonction de $\mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}_0$) n’est pas bijective, cela veut dire que f^{-p} contracte la métrique de Poincaré de \mathcal{V}_0 * par un facteur $c < 1$. D’après le théorème du point fixe de Banach-Picard, il existe $\hat{z} \in \mathcal{V}_p$ un point fixe attractif de f^{-p} . Ainsi, c’est un point p -périodique répulsif de f . De plus, $f^{(p-r)}(\hat{z}) \in \mathcal{V}_r \subset \mathcal{U}$: on a bien trouvé un point périodique répulsif dans \mathcal{U} .

En revanche, si l’un des points de l’orbite homocline est critique, alors on perd le difféomorphisme entre \mathcal{V}_q et \mathcal{V}_0 précédemment établi. On peut cependant choisir deux nouveaux ouverts \mathcal{V}_q et \mathcal{V}_0 (voisinages respectifs de z_q et z_0) tels que $f^q : \mathcal{V}_q \rightarrow \mathcal{V}_0$ soit un revêtement ramifié, dont z_q est le seul point de branchement. Ainsi, $f^p : \mathcal{V}_p \rightarrow \mathcal{V}_0$ est aussi un revêtement ramifié, avec z_p comme seul point

*. On peut bien munir cet ouvert d’une métrique de Poincaré, comme tout ouvert de \mathbb{C} biholomorphe au disque unité.

de branchement. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{\mathcal{V}}_0$ un chemin, qui joint un point de $\partial\mathcal{V}_0$ à z_0 , sans couper \mathcal{V}_p ; et choisissons un secteur de $\bar{\mathcal{V}}_p$ qui est envoyé biholomorphiquement par f^p sur $\mathcal{V}_0 \setminus \gamma([0, 1])$. On peut alors reprendre la preuve comme précédemment, en remplaçant \mathcal{V}_p par le secteur choisi.

Enfin, si le point fixe z_0 n'est pas répulsif mais parabolique, on reprend la démonstration précédente, mais en choisissant \mathcal{N} comme un pétale répulsif, tels qu'ils sont décrits dans le théorème des fleurs [III.3.6](#).

IV.2. La jungle de Julia

La propriété de densité des cycles répulsifs nous renseigne à la fois sur la géométrie et sur la dynamique de l'ensemble de Julia.

Nous pouvons dès à présent dire que la dynamique y est chaotique, dans le sens suivant.

Définition IV.2.1. Un système dynamique discret $f : Z \rightarrow Z$ est dit **chaotique** si :

1. Z est infini ;
2. l'ensemble des points périodiques est dense dans Z ;
3. il existe au moins un point dont l'orbite est dense dans Z .

Remarque : Le caractère chaotique est une propriété plus forte que la simple dépendance aux conditions initiales.* En effet, un point périodique (dont le comportement est le plus sage possible) peut être approché d'aussi près qu'on le souhaite par un point d'orbite dense (dont le comportement est le plus sauvage possible). C'est la présence de ces deux régimes extrêmes dans n'importe quel ouvert intersectant l'ensemble de Julia qui caractérise sa chaoticité.

Démonstration. Le point 1 est une conséquence de la perfection d'un ensemble de Julia, le point 2 découle de la partie précédente. Il nous reste à montrer la dernière propriété.

Soit k un entier : on peut recouvrir tout $\mathcal{J}(f)$ par des disques de rayon $\frac{1}{k}$. On note alors $(D_j)_{j \geq 1}$ la collection dénombrable de tous ces disques en faisant varier k dans \mathbb{N} . Définissons l'ensemble :

$$\mathcal{D} := \bigcap_{j \geq 1} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^n)^{-1} (D_j \cap \mathcal{J}(f)) \right).$$

Si il existe $z \in \mathcal{D}$, alors z a une orbite dense dans $\mathcal{J}(f)$ (par construction même de \mathcal{D}). Montrons alors que \mathcal{D} n'est pas vide.

D'après la propriété de transitivité [II.2.12](#) de f sur son ensemble de Julia, si un ouvert \mathcal{U} intersecte $\mathcal{J}(f)$, alors pour tout $j \geq 1$,

$$D_j \cap \mathcal{J}(f) \subset \mathcal{J}(f) \subset \bigcup_{n \geq 1} f^n(\mathcal{U});$$

*. Voir le chapitre 10 de [\[P.J.S\]](#) pour plus de détails.

et ainsi

$$\mathcal{U} \cap \left(\bigcup_{n \geq 1} (f^n)^{-1}(D_j \cap \mathcal{J}(f)) \right) \neq \emptyset.$$

Autrement dit, l'ensemble $(\bigcup_{n \geq 1} (f^n)^{-1}(D_j \cap \mathcal{J}(f)))$ est dense dans $\mathcal{J}(f)$. Or, d'après le théorème de Baire, \mathcal{D} n'est pas vide, et est même dense dans $\mathcal{J}(f)$! Ceci termine la démonstration du point 3. \square

Enfin, on va tenter de montrer de diverses manières le caractère fractal d'un ensemble de Julia. Notons cependant qu'il n'y a pas de définition formelle communément admise de fractale : nous ne présentons que des indices de "fractalité".

Dans un premier temps, on observe un effet zoom, qui explique l'aspect auto-similaire des ensembles de Julia. Concrètement, cela veut dire que le moindre détail d'un ensemble de Julia est déjà inscrit dans n'importe quel voisinage d'un point de l'ensemble de Julia.

Propriété IV.2.2 – Effet Zoom. *Soit f une fraction rationnelle de degré au moins deux. Soit \mathcal{U} un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$ intersectant $\mathcal{J}(f)$, alors il existe un entier N tel que $\mathcal{J}(f) = f^N(\mathcal{U} \cap \mathcal{J}(f))$.*

Démonstration. Par densité des cycles répulsifs dans $\mathcal{J}(f)$, on sait qu'il existe un point $z_0 \in \mathcal{U}$ qui est p -périodique répulsif pour f . Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ un voisinage de z_0 vérifiant $\mathcal{V} \subset f^p(\mathcal{V})$ (ce qui se transmettra aux autres itérées de f^p). De plus, par transitivité de $\mathcal{J}(f)$,

$$\mathcal{J}(f) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^p)^n(\mathcal{V}).$$

Comme $\mathcal{J}(f)$ est compact, et que $(f^p)^n(\mathcal{V}) \subset (f^p)^{n+1}(\mathcal{V})$, on peut trouver N assez grand tel que :

$$\mathcal{J}(f) \subset (f^p)^N(\mathcal{V}) \subset (f^p)^N(\mathcal{U}).$$

Par invariance totale de $\mathcal{J}(f)$, on en déduit bien $\mathcal{J}(f) = f^{pN}(\mathcal{U} \cap \mathcal{J}(f))$. \square

Corollaire IV.2.3 – Composantes connexes de l'ensemble de Julia. *Un ensemble de Julia est soit connexe, soit possède une infinité non dénombrable de composantes connexes.*

Démonstration. Soit f une fraction rationnelle de degré au moins deux. Supposons que $\mathcal{J}(f)$ s'écrive comme réunion disjointe de deux ensembles $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1 \neq \emptyset$. Alors par la propriété d'effet zoom [IV.2.2](#), il existe un entier N tel que $g = f^N$ vérifie

$$g(\mathcal{J}_0) = \mathcal{J}(f) \quad \text{et} \quad g(\mathcal{J}_1) = \mathcal{J}(f).$$

Soit $z \in \mathcal{J}(f)$, on lui associe la suite $(\epsilon_k(z))_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, g^k(z) \in \mathcal{J}_{\epsilon_k(z)}.$$

- D'une part, si deux points sont dans la même composante connexe de $\mathcal{J}(f)$, alors leurs suites associées seront identiques.
- D'autre part, chaque suite est effectivement réalisée, par la propriété de la fonction g .

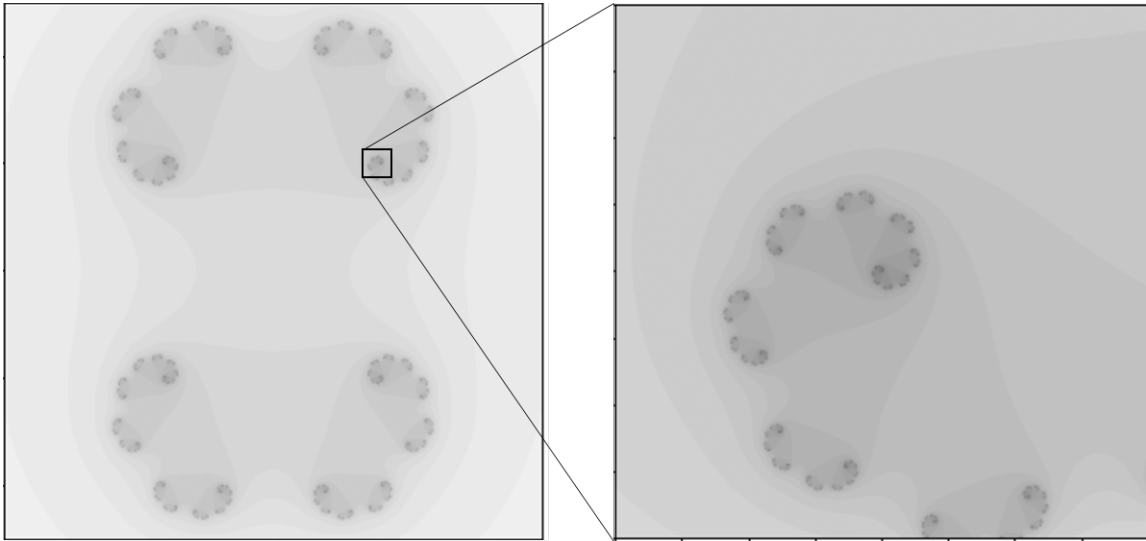


FIGURE 8 – La fonction $z \mapsto z^2 + \frac{1}{2}$ fournit un exemple d'ensemble de Julia homéomorphe à l'ensemble de Cantor, et illustre l'effet zoom décrit plus haut.

Chaque composante connexe de $\mathcal{J}(f)$ peut alors être mise en bijection avec une suite de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, qui est non dénombrable. \square

Plus qu'une bijection, on peut parfois trouver un homéomorphisme entre certains ensembles de Julia et l'ensemble de Cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, c'est le cas dans la figure 8.

Avec une hypothèse supplémentaire, on peut montrer que le bord d'un ensemble de Julia n'est pas lisse en certains points (c'est-à-dire qu'on ne peut pas le paramétrer par un chemin \mathcal{C}^1 sur n'importe quels voisinages de ces points) : c'est souvent caractéristique des fractales.

Propriété IV.2.4 – Rugosité. *Si f admet un point fixe répulsif \hat{z} de multiplicateur λ non réel, alors $\mathcal{J}(f)$ ne peut pas être lisse, à moins d'être $\hat{\mathbb{C}}$ entier.*

Démonstration. Prenons un point $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ suffisamment proche de \hat{z}^* et posons $w_0 = \phi(z_0)$ sa coordonnée de Koenigs. Intéressons nous maintenant à l'orbite passée $z_0 \leftarrow z_1 \leftarrow z_2 \leftarrow \dots$. Elle est bien définie uniquement car $\lambda \neq 0$, et elle est incluse dans $\mathcal{J}(f)$ par invariance totale. Comme 0 est attractif dans le passé, cette orbite passée provient de \hat{z} . Or dans les coordonnées de Koenigs, $\phi(z_n) = \frac{w_0}{\lambda^n}$. Donc l'orbite passée forme une spirale logarithmique qui s'enroule autour de \hat{z} (voir figure 9). L'ensemble de Julia n'est alors pas lisse autour de ce point fixe, à moins de contenir un voisinage de \hat{z} , donc $\hat{\mathbb{C}}$ tout entier. \square

Enfin, on pourrait étudier la dimension de Hausdorff des ensembles de Julia : sa connaissance peut nous informer sur les propriétés dynamiques de la fonction itérée.

*. Qui existe bien car $\mathcal{J}(f)$ est parfait.

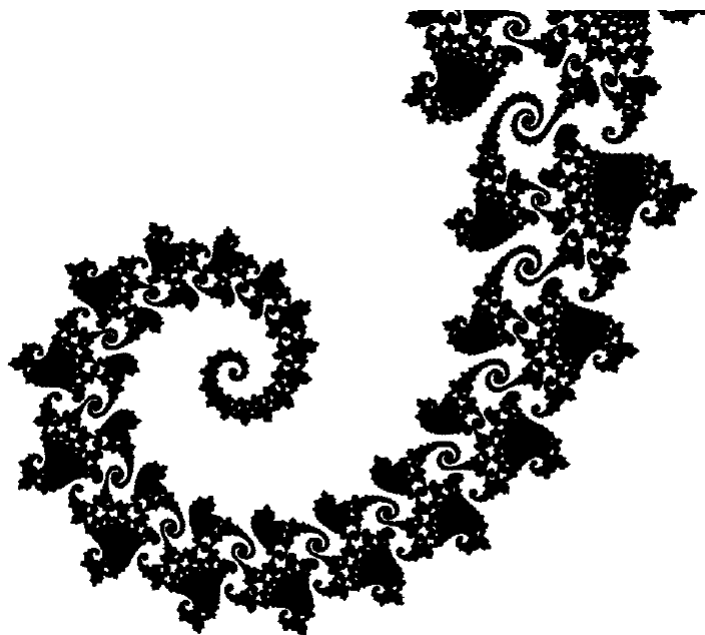


FIGURE 9 – Zoom sur une tentacule spirale logarithmique, pour $z \mapsto z^2 - 0.744336 + 0.121198i$.
(Crédit : John Milnor, [Mil.]).

IV.3. Structure de l'ensemble de Fatou

L'étude locale de la section précédente, allée aux puissants théorèmes que nous allons voir, permet de comprendre la dynamique sur $\mathcal{F}(f)$. Les démonstrations de ces théorèmes sont ardues, et nous renvoyons à [Stein.] pour plus de détails.

On appelle **composante de Fatou**, notée ici V , toute composante connexe de $\mathcal{F}(f)$.

Proposition IV.3.1. *Une fraction rationnelle envoie ses composantes de Fatou sur des composantes de Fatou.*

Démonstration. Soit V une composante de Fatou. Comme $\mathcal{F}(f)$ est invariant, l'ensemble connexe $f(V)$ est inclus dans $\mathcal{F}(f)$, donc dans une composante de Fatou. Or comme ∂V est inclus dans $\mathcal{J}(f)$ qui est aussi invariant, on a $f(\partial V) \subset \mathcal{J}(f)$. Donc $f(V)$ est une composante connexe de $\mathcal{F}(f)$, c'est-à-dire une composante de Fatou. \square

Intéressons nous à l'évolution de V sous l'action de f , c'est-à-dire à la suite $(f^n(V))_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition IV.3.2. Une composante de Fatou V est dite :

- **errante** si $\forall n \neq m, f^n(V) \neq f^m(V)$, *
- **périodique** si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p(V) = V$,

*. C'est-à-dire qu'elle se balade sans jamais revenir à un endroit où elle est déjà passée.

— **pré-périodique** si elle n'est pas périodique, mais contient dans son orbite une composante de Fatou périodique.

Exemple IV.3.3. Soit z_0, \dots, z_{p-1} un p -cycle attractif, et V_k la composante de Fatou contenant z_k . On a alors que $f(V_k) = V_{k+1}$, et donc que chaque V_k est p -périodique.

La question de l'existence ou non de composante errante a résisté de nombreuses années après les travaux de Fatou et Julia. Il a fallu attendre 1982 pour que le mathématicien américain *Dennis Sullivan* tranche la question, et 1985 pour qu'il fournisse une preuve rigoureuse.

Théorème IV.3.4 – Sullivan, 1985. *Il n'existe pas de composante errante.*

Ce théorème, bien que très rapide à énoncer, a une démonstration largement hors de portée pour les simples étudiants de L3 que nous sommes (voir [Bert.May.] ou [Stein.]). Sullivan introduit dans sa preuve la méthode des déformations quasi-conformes, qui a révolutionné le monde de la dynamique holomorphe et a grandement concouru au fait qu'il reçoive le prix Abel en 2022.

Ce puissant résultat nous assure que toute composante de Fatou V est au moins pré-périodique. Cela signifie qu'il suffit d'attendre un certain temps fini m pour que $W = f^m(V)$ soit périodique, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $W, f(W), \dots, f^{p-1}(W)$ forme un p -cycle.

Nous nous ramenons alors simplement à l'étude de composantes de Fatou invariantes, car chaque composante de Fatou invariante par f^p est en particulier une composante de Fatou p -périodique pour f , et vice-versa.

Intéressons nous à deux classes de composantes de Fatou invariantes.

Définition IV.3.5. Une composante de Fatou invariante V est appelée :

- **domaine de Fatou** si la suite (f^n) converge localement uniformément vers un point fixe $\hat{z} \in \bar{V}$, c'est-à-dire si c'est un bassin d'attraction immédiat ;
- **domaine de rotation** si f y est conjugué à une rotation d'angle irrationnel.

L'étude de la section précédente nous fournit déjà une compréhension totale des domaines de Fatou. Un peu de travail supplémentaire nous permettrait de montrer que les domaines de rotations de peuvent être que de deux types. Ce dernier théorème, prouvé dans [Bert.May.], couronne notre étude.

Théorème IV.3.6 – Classification de Cremer-Fatou. *Soit f une fraction rationnelle de degré au moins 2. Voici la liste exhaustive de ses composantes de Fatou invariantes possibles.*

- *Domaines de Fatou :*
 - *Bassin super-attractif immédiat (domaine de Böttcher, $\hat{z} \in V, \lambda = 0$);*
 - *Bassin géométriquement attractif immédiat (domaine de Schröder, $\hat{z} \in V, 0 < |\lambda| < 1$);*
 - *Bassin parabolique immédiat (domaine de Leau, $\hat{z} \in \partial V, \lambda = 1$);*
- *Domaines de rotation :*
 - *Disque de Siegel (simplement connexe et contient un point fixe irrationnellement neutre);*
 - *Anneau d'Herman* (conformément isomorphe à un anneau $A_r = \{1 < |z| < r\}$ avec $r > 1$).*

Remarque : Le théorème de classification, allié au théorème de non-errance, dit que l'ensemble de Fatou est composé des composantes invariantes citées et de leurs préimages, qu'il ne faut pas oublier !

*. Voir [Mil.] pour plus de détails.

A. Annexe

A.1. Trombinoscope de la famille Julia

Nous allons explorer ici certaines formes que peuvent prendre les ensembles de Julia. Il faut toujours garder en tête que ces ensembles vivent sur la sphère de Riemann, comme le montre la figure 10 et l'illustration de couverture, deux oeuvres d'Arnaud Cheritat. Son site internet* vaut le détour pour toute personne curieuse de découvrir le petit monde de la dynamique holomorphe. Les plus manuels peuvent aussi donner une existence physique aux ensembles de Julia grâce aux patrons imprimables proposés par Xavier Buff.†

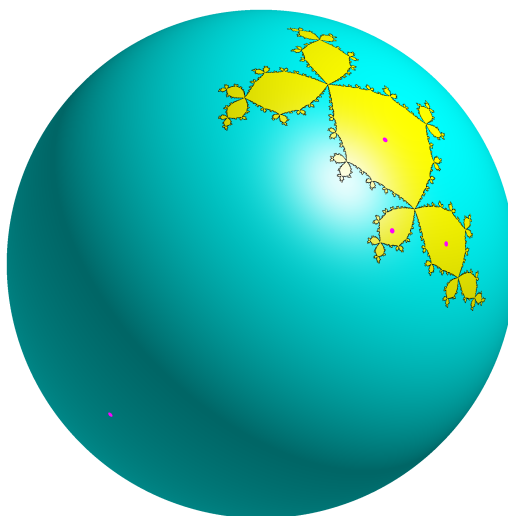


FIGURE 10 – Lapin de Douady sur la sphère de Riemann. Le point violet en bas à gauche représente l'infini. (Crédit : Arnaud Chéritat.)

Cependant, il est beaucoup plus simple de représenter les ensembles de Julia sur une partie de \mathbb{C} , ce qui est fait habituellement. Commençons par les ensembles de Julia les plus connus, venant de polynômes quadratiques (voir figure 11). Ces ensembles de Julia nourrissent un lien profond avec une autre fractale encore plus célèbre, celle de Mandelbrot. Le logiciel [Xaos](#) permet de les explorer.

Les ensembles de Julia venant de fractions rationnelles non polynômiales sont encore plus variés, comme nous pouvons le voir sur la figure 12. Ils sont souvent éclipsés par les ensembles de Julia de polynômes, car demandent un peu plus de travail pour les générer numériquement.

*. <https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/>

†. <https://www.math.univ-toulouse.fr/~buff/Symmetries/Patterns.html>

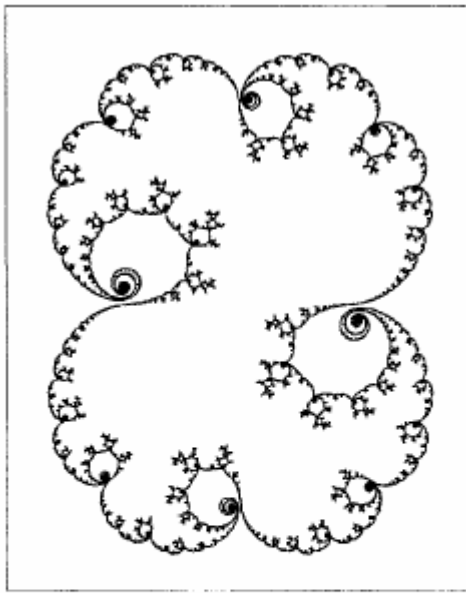


Figure 5a. A simple closed curve,
 $z \mapsto z^2 + (.99 + .14i)z$.

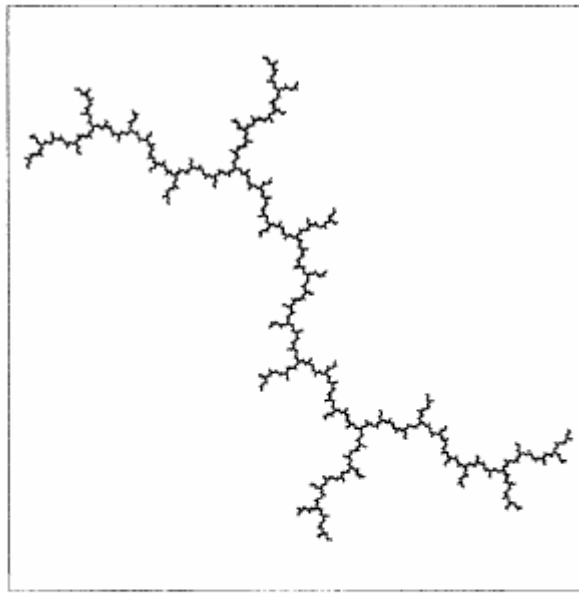


Figure 5b. A "dendrite,"
 $z \mapsto z^2 + i$.

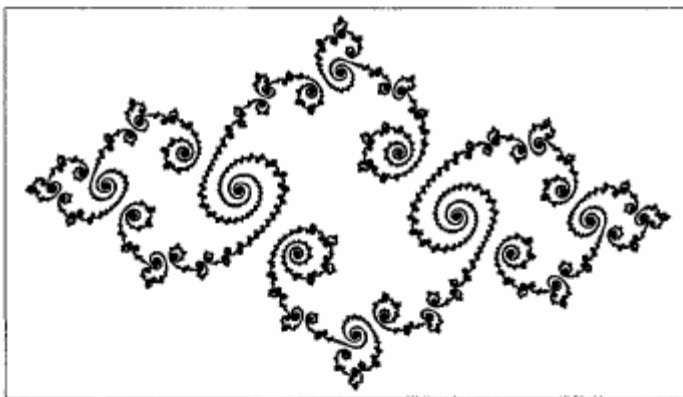


Figure 5c. A Cantor set,
 $z \mapsto z^2 + (-.765 + .12i)$.

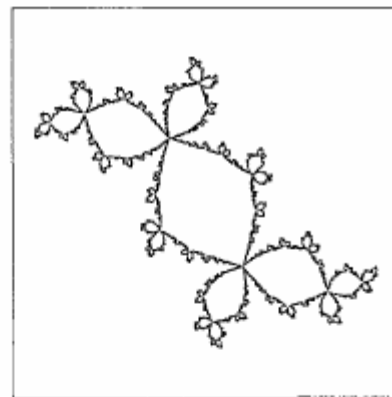


Figure 5d. The Douady rabbit
 $z \mapsto z^2 + (-.122 + .745i)$.

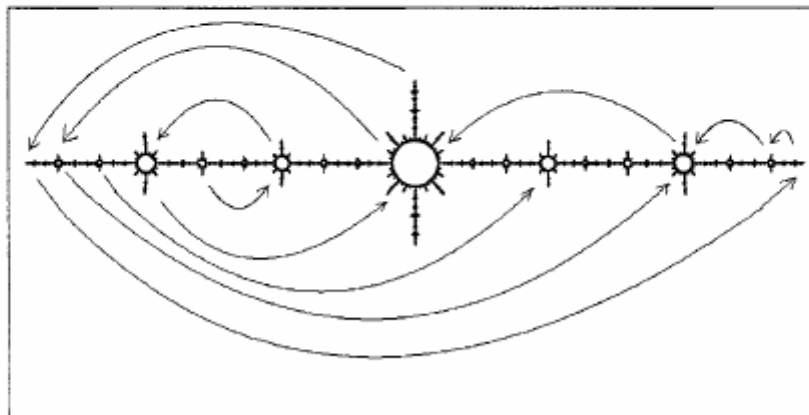
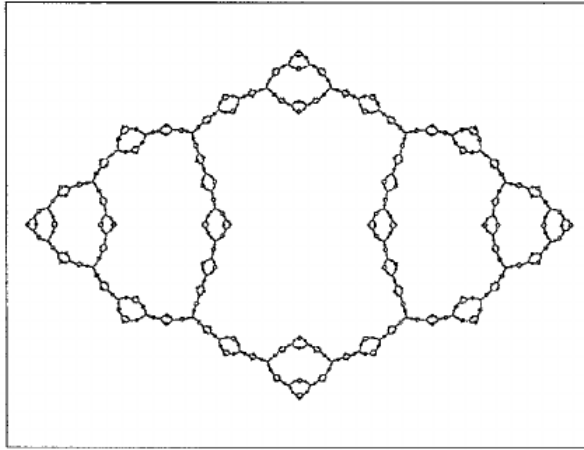
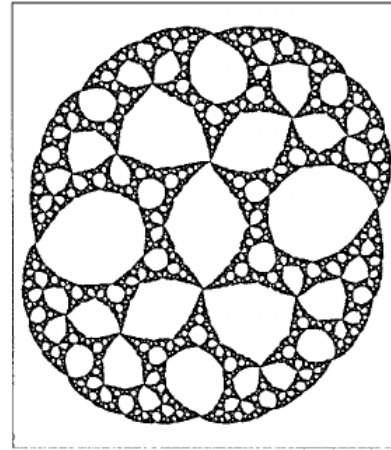


Figure 5e. The "airplane": $z \mapsto z^2 - 1.75488 \dots$

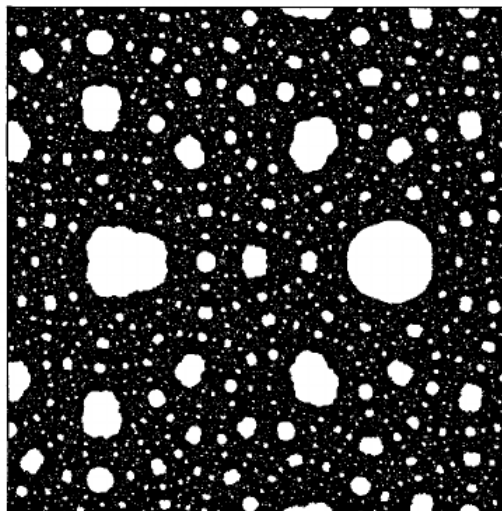
FIGURE 11 – Ensembles de Julia venant de polynômes quadratiques. Les flèches sur l'exemple e indiquent où les zones sont envoyées. (Crédit : John Milnor, [Mil.])



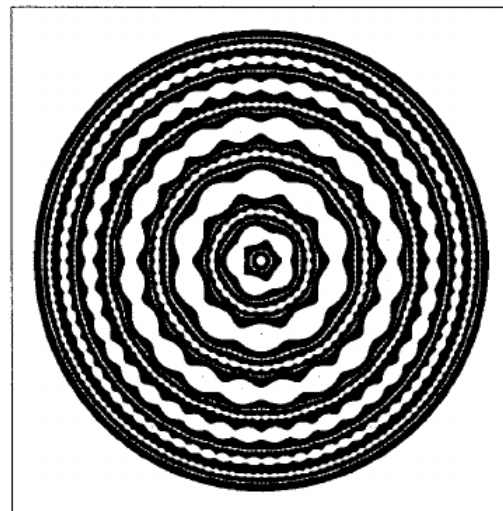
6a. $f(z) = 1 - 1/z^2$



6b. $f(z) = \frac{c+z^2}{1-z^2}$ with $c = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$



6c. $f(z) = -.138(z + 1/z) - .303$



6d. $f(z) = (z^5 - .00001)/z^3$

FIGURE 12 – Ensembles de Julia venant de fractions rationnelles. Un lapin de Douady se cache dans l'exemple *b*. Le *c* est un tapis de Sierpinsky, c'est-à-dire que l'ensemble de Fatou est dense, et que ses composantes connexes sont bordées par des courbes fermées simples. Le *d* exhibe des anneaux d'Herman. (Crédit : John Milnor, [Mil].)

Terminons par deux hommages à Adrien Douady, pionnier de la dynamique holomorphe moderne. Ces éléments sont issus du site d'Arnaud Cheritat, qui nous a confirmé en être l'auteur.

*"Au milieu du champ danse un lapin
 Dans le délire d'un éléphant qui fume,
 Il se change en koala,
 Puis en dragon
 Près de lui une bulle se flétrit en chou-fleur
 Implose en papillons et s'envole en poussière
 C'est une symphonie de couleurs, et le chef d'orchestre
 Est un bonhomme en pain d'épices"*

Ce poème parle de différents ensembles de Julia. Plusieurs noms sortent de l'inventivité de Douady, et donnent à eux seuls envie de mieux connaître la dynamique holomorphe.

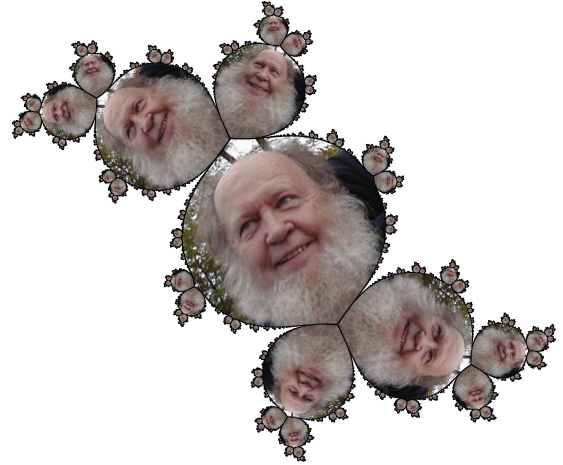


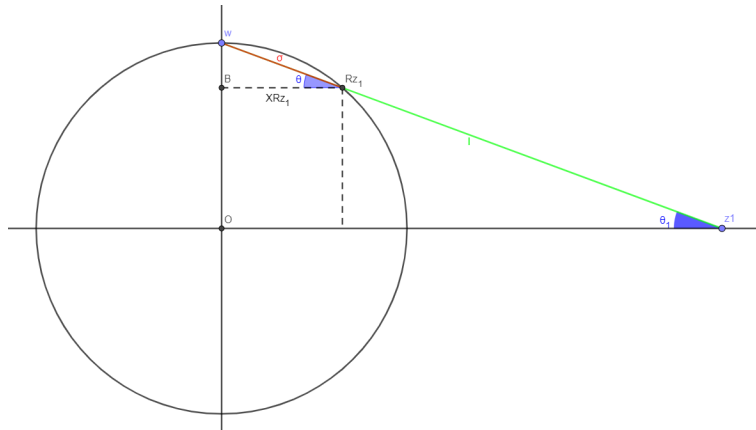
FIGURE 13 – Lapin gras de Douady...
 parce qu'il a mangé
 Douady.

A.2. Annexe de calculs

Distance cordale

On se propose d'établir l'expression de la distance cordale. Calculons dans un premier temps la distance d'un point z_1

avec ∞ . Si $R(z_1) = (a, b, c)$, alors on pose $X_{R(z_1)} = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2|z_1|}{1 + |z_1|^2}$. Ensuite, si l est la longueur de la corde qui relie w et z_1 , alors d'après le théorème de Pythagore, $l = \sqrt{1 + |z_1|^2}$.



Ensuite, les droites $(B : R(z_1))$ et $(O : z_1)$ sont parallèles. Il s'ensuit que les angles θ et θ_1 sont égaux, et donc que les triangles $T(w, B, R(z_1))$ et $T(w, O, z_1)$ sont similaires. On applique donc le théorème

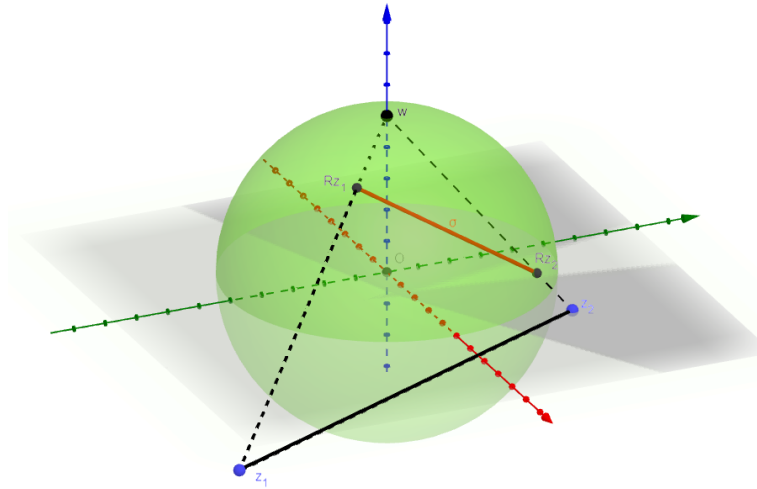
de Thalès :

$$\frac{X_R(z_1)}{|z|} = \frac{\sigma(z_1, \infty)}{l},$$

ce qui donne :

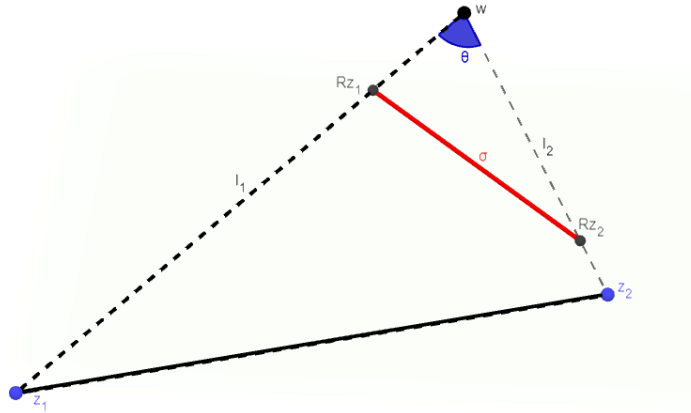
$$\sigma(z_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}.$$

On passe maintenant à la recherche de l'expression de la distance entre deux nombres complexes z_1 et z_2 . On note $\vec{a} = \overline{wR}(z_1)$, $\vec{b} = \overline{wR}(z_2)$, $\vec{\sigma} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{l}_1 = \overline{wz_1}$ et $\vec{l}_2 = \overline{wz_2}$, et on note leurs longueurs respectivement a , b , σ , l_1 et l_2 .



On peut remarquer que $\sigma = \sigma(z_1, z_2)$, que d'après le théorème de Pythagore, $l_1 = \sqrt{1 + |z_1|^2}$ et $l_2 = \sqrt{1 + |z_2|^2}$, et enfin que $a = \sigma(z_1, \infty)$ et $b = \sigma(z_2, \infty)$.

Introduire tout ces objets nous incite à exploiter les propriétés du produit scalaire. Pourquoi ? Parce que les vecteurs \vec{a} et \vec{l}_1 sont sur la même droite vectorielle. De même pour \vec{b} et \vec{l}_2 . Ce qui signifie que les angles entre les vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{l}_1 , \vec{l}_2 sont égaux. On note cet angle θ . On va se servir de ce fait pour pouvoir exprimer σ uniquement en fonction de z_1 et z_2 .



Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\sigma^2 = \langle \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \rangle = \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = a^2 + b^2 - 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{4}{l_1^2} + \frac{4}{l_2^2} - \frac{8}{l_1 l_2} \cos(\theta).$$

De même, on trouve :

$$|z_1 - z_2|^2 = \langle \vec{l}_1 - \vec{l}_2, \vec{l}_1 - \vec{l}_2 \rangle = l_1^2 + l_2^2 - 2 \langle \vec{l}_1, \vec{l}_2 \rangle = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\theta).$$

Il ne reste plus qu'à isoler $\cos(\theta)$ dans les deux expressions pour ne finir qu'avec une seule égalité. On obtient alors l'égalité :

$$\sigma(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Groupe de Möbius

On vérifie facilement les propriétés suivantes sur les transformations de Möbius :

Propriété A.2.1 – Groupe des transformations de Möbius.

1. Soit $M \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, telle que

$$M : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Alors M est inversible, d'inverse

$$M^{-1} : z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}$$

2. Cela fait de $(\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}), \circ)$ un groupe, qui est isomorphe à $GL_2(\mathbb{C}) / (\mathbb{C}^* \cdot \text{Id}_2) \sim \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ par l'isomorphisme :

$$\varphi : \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \mapsto \text{Cl} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où $\text{Cl} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la classe d'équivalence de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ modulo $\mathbb{C}^* \cdot \text{Id}_2$. De plus, ce groupe est le groupe des automorphismes de $\widehat{\mathbb{C}}$.

3. Soit $M \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ et $f \in \mathcal{O}(\widehat{\mathbb{C}})$.

z_0 est un point fixe de f si et seulement si l'application conjuguée MfM^{-1} admet $M(z_0)$ comme point fixe.

4. L'action de groupe :

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \times \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ (M, z) &\longmapsto M(z) \end{aligned}$$

est fidèle et 3-transitive (c'est-à-dire que, pour tous triplets (z_1, z_2, z_3) et (w_1, w_2, w_3) , il existe une transformation de Möbius qui envoie z_i sur w_i pour tout $1 \leq i \leq 3$).

La deuxième propriété est surtout utile en pratique, car elle permet d'assimiler les compositions de transformations de Möbius aux produits de matrices. De plus, la condition " $ad - bc \neq 0$ ", qui permet essentiellement de ne pas considérer les fonctions constantes parmi les transformations de Möbius, est aussi celle qui permet de distinguer les matrices de $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ parmi celles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

En utilisant conjointement les propriétés 3 et 4, on peut choisir de placer les points fixes des fractions rationnelles selon ce qui nous arrange, notamment pour éviter d'étudier des points fixes en ∞ .

Références

- [Alex.] Alexander, Daniel S. *A History of complex dynamics : from Schröder to Fatou and Julia*. Vol. 24. Wiesbaden : Springer Vieweg. in Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1994. Aspects of Mathematics.
- [Aud.] Audin, Michèle. *Fatou, Julia, Montel : le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et après...* . 2009. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg.
- [Beard.] Beardon, Alan F. *Iteration of Rational Functions : Complex Analytic Dynamical Systems*. 1991. Graduate Texts in Mathematics 132.
- [Bert.] Berteloot, François. *Les familles normales : une introduction, et un nouveau regard*. 2021. Collection Nano.
- [Bert.May.] Berteloot, François, and Volker Mayer. *Rudiments de dynamique holomorphe*. 2001. Collection SMF Cours Spécialisés 7.
- [Mil.] Milnor, John W. *Dynamics in One Complex Variable. 3rd ed.* Princeton, N.J. : Princeton UP, 2006. Annals of Mathematics Studies ; No. 160.
- [P.J.S] Peitgen, Heinz-Otto, Hartmut Jürgens, and Dietmar Saupe. *Chaos and Fractals. Second ed.* New York, NY : Springer, 2006.
- [Stein.] Steinmetz, Norbert. *Rational Iteration : Complex Analytic Dynamical Systems*. 1993. De Gruyter Studies in Mathematics 16.