Théorie géométrique des invariants et hypersurfaces projectives singulières

Thomas Mordant
15 mai 2024
Institut Henri Poincaré

Références :

Hilbert Über die Theorie der algebraischen Formen
Math. Ann. 36 473-534, 1890
Über die vollen Invariantensysteme
Math. Ann. 42 313-373, 1893

Mumford Geometric Invariant Theory, 1965

Plan :

1. Introduction : actions de groupes algébriques linéaires et invariants
2. Trois quotients
3. Groupes linéairement réductifs
4. GIT affine
5. GIT projective
6. Le critère de Hilbert-Mumford
7. Semi-stabilité des hypersurfaces projectives

Dans tout l'exposé, on travaille sur un corps $k = \overline{k}$.

1. Introduction : Actions de groupes algébriques linéaires et invariants

- $G \underset{\text{ss-groupe algébrique lisse sur } k}{\hookrightarrow} GL_{n,k} \quad \leadsto \quad G(k) \underset{\text{ss-groupe Zariski fermé}}{\hookrightarrow} GL_n(k)$

- action algébrique de G sur X "variété algébrique" := k-schéma séparé de type fini

$$\sigma : G \times X \longrightarrow X \text{ morphisme de } k\text{-schémas}$$
$$\text{t.q. } G(k) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{k\text{-sch}}(X) \text{ morphisme de groupes}$$
$$g \longmapsto \sigma(g, \cdot)$$

$\leadsto$ action "naïve" de $G(k)$ sur $X(k)$, qui détermine σ lorsque X est réduit

- k-algèbre des fonctions régulières G-invariantes sur X :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^G := \{ f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid \forall g \in G(k),\ f(g^{-1}\cdot) = f \}$$

Exemples :

1) $G(k) = \mathfrak{S}_N$ ($\hookrightarrow GL_N(k)$) agit sur $\mathbb{A}^N$ par permutation des coordonnées :

$$\Gamma(\mathbb{A}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^N})^{\mathfrak{S}_N} = k[X_1, \dots, X_N]^{\mathfrak{S}_N} \xleftarrow{\sim} k[Y_1, \dots, Y_N]$$
$$\sigma_i \longleftarrow Y_i$$

où $\sigma_i = X_1 \cdots X_i + \dots$

$$\mathbb{A}^N(k)/\mathfrak{S}_N \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^N(k)$$
$$[(x_1, \dots, x_N)] \longmapsto (\sigma_1(x_1, \dots, x_N), \dots, \sigma_N(x_1, \dots, x_N))$$

2) $G = \mathbb{G}_m$ agit sur $\mathbb{A}^1_k$ par multiplication :

$$\Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1})^{\mathbb{G}_m} = k[x]^{\mathbb{G}_m} = k$$

$$\mathbb{A}^1(k) / \mathbb{G}_m(k) = \{ \{0\}, k^\times \}$$

$$\{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^1(k) \qquad k^\times \hookrightarrow \mathbb{A}^1(k)$$

3) $G = GL_N$ agit sur $X = M_N = \mathbb{A}^{N^2}$ par conjugaison :

$$X(k) = M_N(k)$$

$1 \leq i \leq N$ $\quad \sigma_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^G \qquad \det(T I_N - A) = T^N + \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \sigma_i(A) T^{N-i}$

$$\sigma_i \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} = \sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

$$\Gamma(M_N, \mathcal{O}_{M_N})^{GL_N} \xleftarrow{\sim} k[Y_1, \dots, Y_N]$$
$$\sigma_i \longleftarrow Y_i$$

$A \in M_N(k) \quad G(k).A = \{ g A g^{-1} \,;\, g \in GL_N(k) \}$ "est" une sous-variété localement fermée de $M_N(k)$ ..., fermée ssi A est diagonalisable.

$$\mathcal{N} := \{ A \in M_N(k) \mid A^N = 0 \} = \bigcap_{1 \leq i \leq N} \sigma_i^{-1}(0)$$
$$= \{ A \in M_N(k) \mid \forall P \in \Gamma(M_N, \mathcal{O}_{M_N})^{GL_N}, \; P(0) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \}$$

Constructibilité

+

Théorie de la dimension

$\rightsquigarrow$

- Les orbites de $G(k)$ sur $X(k)$ sont des "sous-variétés" de $X(k)$, localement fermées et lisses.
- Pour tout $x \in X(k)$, $\overline{G(k)\cdot x}$ est un fermé $G(k)$-invariant de $X(k)$, et contient une orbite fermée.

2. Trois quotients

$\begin{cases} G \text{ groupe algébrique linéaire lisse sur } k \\ X \text{ schéma séparé de type fini sur } k \\ \text{action : } \quad \sigma : G \times X \longrightarrow X \end{cases}$

$X(k) \hookrightarrow |X|$

"variété de Serre" $\longleftrightarrow$ k-schéma X_{red}

$\varphi : X \to Y$ k-morphisme vers Y k-schéma (séparé de type fini)

$$G \times X \underset{pr_2}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\varphi} Y$$

Déf 0 : φ G-invariant $\overset{def}{\iff}$ $\varphi \circ \sigma = \varphi \circ pr_2$

Déf 1 : On dit que φ est un quotient catégorique lorsque c'est un morphisme G-invariant universel (i.e. un objet initial de la catégorie des morphismes G-invariants de source X).

Prop : Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme G-invariant et surjectif (sur les k-points). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\forall Z \overset{f}{\hookrightarrow} |X|$ G-invariant, $\varphi(Z) \overset{f}{\hookrightarrow} |Y|$ et $\forall Z_1$ et $Z_2 \overset{f}{\hookrightarrow} |X|$ G-invariants, $\varphi(Z_1 \cap Z_2) = \varphi(Z_1) \cap \varphi(Z_2)$

(b) $\forall Z_1$ et $Z_2 \overset{f}{\hookrightarrow} |X|$ G-invariants, $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset \Rightarrow \overline{\varphi(Z_1)} \cap \overline{\varphi(Z_2)} = \emptyset$

Lorsqu'elles sont satisfaites, alors :

$\forall (x_1, x_2) \in X(k)^2$, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \iff \overline{G(k).x_1} \cap \overline{G(k).x_2} \neq \emptyset$

$\forall y \in Y(k)$, $\varphi^{-1}(y)$ contient une unique orbite fermée de $G(k)$ sur $X(k)$.

Dém. : Exercice. Indications : $\varphi(\overline{G(k).x}) = \{\varphi(x)\}$
+ existence d'orbites fermées

Def. 2 : Un morphisme G-invariant $\varphi : X \to Y$ est un bon quotient lorsque :

(i) φ est affine et surjectif ;

(ii) $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \varphi_* \mathcal{O}_X^G := (U \mapsto \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)^G)$

(iii) (a), (b) de prop. précédente

Def. 3 : Un k-morphisme G-invariant $\varphi : X \to Y$ est un quotient géométrique lorsque φ est un bon quotient et que :

$\forall\, y \in Y(k)$, $\varphi^{-1}(y)$ est une orbite de $G(k)$ sur $X(k)$.

Prop. : 1) Les notions de quotient catégorique / bon / géométrique sont locales sur Y muni de la topologie de Zariski.

2) $\varphi : X \to Y$ bon quotient $\Rightarrow$ la topologie de $|Y|$ est la topologie quotient de la topologie de $|X|$

$\Downarrow (*)$

φ quotient catégorique

NB : $(*) \rightsquigarrow$ unicité du bon quotient

Exemples :

1) $(\sigma_1, \dots, \sigma_N) : \mathbb{A}^N \to \mathbb{A}^N$ est un quotient géométrique de $\mathbb{A}^N$ par $\mathfrak{S}_N$

2) $(\sigma_1, \dots, \sigma_N) : M^N \to \mathbb{A}^N$ est un bon quotient de M_N pour l'action de GL_N par conjugaison, mais n'est pas un quotient géométrique si $N \geq 2$

3. Groupes algébriques linéairement réductifs

G groupe algébrique linéaire lisse sur k.

<u>G-module de dim. finie</u> :=

$$\left\{\begin{array}{l} V \ k\text{-vect. de dim. finie} \\ + \ G \to GL(V) \text{ morphisme de } k\text{-groupes algébriques} \end{array}\right.$$

$$\updownarrow$$

$V \to V \otimes_k k[G]$, $v \mapsto (g \mapsto g.v)$ k-linéaire + compatible au (co)produit

$$k[G] \to k[G] \otimes_k k[G] \simeq k[G \times G]$$
$$\varphi \mapsto ((g_1, g_2) \mapsto \varphi(g_1 g_2))$$

foncteur "points fixes" ; exact à gauche

$$\{G\text{-modules de dim. finie}\} \longrightarrow \{k\text{-vectoriels de dim. finie}\}$$
$$V \longmapsto V^G$$

<u>G-module localement fini</u> :=

$$\left\{\begin{array}{l} V \ k\text{-vectoriel} \\ V \to V \otimes_k k[G] \ k\text{-linéaire + compatible au coproduit} \end{array}\right.$$

<u>Exemple</u> : Si X est un k-schéma affine muni d'une action de G : $\sigma : G \times X \to X$, alors $\sigma^* : k[X] \to k[G \times X] \simeq k[X] \otimes_k k[G]$ est un morphisme de k-algèbres qui fait de $k[X]$ un G-module localement fini.

<u>Observation</u> : Si V est un G-module localement fini, alors $V \simeq \varinjlim_i V_i$, $V_i \subseteq V$ sous G-module de dim. finie

La catégorie des G-modules loc^t finis s'identifie à la catégorie des Ind-(G-modules de dim. finie).

<u>Prop. - Déf.</u> : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Tout G-module de dim. finie V est semi-simple : $V \simeq \bigoplus_{i \in F} V_i$, V_i G-module irréductible

(2) Si V est un G-module de dim. finie et $W \subset V$ un sous-k-vect G-stable, alors il existe $W' \subset V$ sous-k-vect G-stable t.q. $V = W \oplus W'$

(3) Toute suite exacte courte de G-modules de dim. finie est scindée dans la catégorie des G-modules.

(4) Le foncteur $\{G\text{-mod. de dim. finie}\} \to \{k\text{-vect de dim finie}\}$ est exact (à droite).
$$V \longmapsto V^G$$

(5) Le foncteur $\{G\text{-mod. localement finis}\} \to \{k\text{-vect}\}$ est exact (à droite).
$$V \longmapsto V^G$$

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que G est <u>linéairement réductif</u>.

<u>Dém</u> : (4) $\Rightarrow$ (3) : $V_2 \overset{s}{\underset{p}{\rightleftarrows}} V_3$ $\leadsto$ $\mathrm{Hom}_k(V_3, V_2)^G \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_k(V_3, V_3)^G$
$$s \longmapsto \mathrm{Id}_{V_3}$$

<u>Prop</u> : 1) Si G est linéairement réductif, alors pour tout G-module de dim. finie V, il existe un sous-G-module V' t.q. $V = V' \oplus V^G$. On note $E_V : V \to V^G$ le projecteur de noyau V' ; c'est l'unique projecteur sur V^G qui est un morphisme de G-modules. La construction de E_V est naturelle en V : pour tout morphisme de G-modules de dim. finie $f : V_1 \to V_2$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "E_{V_1}"'] & V_2 \arrow[d, "E_{V_2}"] \\ V_1^G \arrow[r, "f|_{V_1^G}"'] & V_2^G \end{tikzcd}$$

"opérateurs de Reynolds"

2) Réciproquement, si à tout G-mod. de dim. finie V, on peut associer naturellement en V un projecteur G-équivariant $E_V : V \to V^G$, alors G est linéairement réductif.

Exemples

1) G fini et $|G| \in k^\times \Rightarrow G$ linéairement réductif

En effet à un G-module V défini par $\pi : G \to GL(V)$, on peut associer $E_V := |G|^{-1} \sum_{g \in G} \pi(g)$.

2) $G = \mathbb{G}_m^N$ est linéairement réductif.

$\Leftarrow$ G-module localement fini "=" k-vectoriel $\mathbb{Z}^N$-gradué

3) carac $k = 0$ $\quad G^\circ$ réductif $\Rightarrow G$ linéairement réductif

$k = \mathbb{C}$ $\quad G = GL_N, SL_N, O_N, Sp_N$

$K = G(\mathbb{C}) \cap U(N)$ compact + Zariski-dense dans $G(\mathbb{C})$

μ mesure de Haar normalisée sur K

$\pi : G \to GL(V)$ G-module de dim. finie $\Leftrightarrow$ représentation alg. sur $\mathbb{C}$ de $G(\mathbb{C})$

$$E_V = \int_K \pi(x)\, d\mu(x)$$

4) $\mathbb{G}_a$ n'est pas linéairement réductif.

$\mathbb{G}_a \to GL_2$ définit un $\mathbb{G}_a$-module V de dim. 2

$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La suite exacte courte
$$\begin{array}{ccccccccc} & & x & \longmapsto & \binom{x}{0} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & [1] & \longrightarrow & V & \longrightarrow & [1] & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\| & & \binom{x}{y} & \longmapsto & y & & \\ & & k + \text{action triviale} & & & & & & \end{array}$$
n'est pas scindée

et donc $\mathbb{G}_a$ n'est pas linéairement réductif.

4. GIT affine

Théorème : Soit G groupe algébrique linéaire lisse $/k$ et linéairement réductif agissant sur $X = \operatorname{Spec} R$ affine de type fini sur k.
Alors R^G est une k-algèbre de type fini sur k et le k-morphisme
$\varphi : X = \operatorname{Spec} R \longrightarrow Y := \operatorname{Spec} R^G$ défini par l'inclusion $R^G \hookrightarrow R$
est un bon quotient.

Corollaire : Lorsque G est linéairement réductif, la condition (iii) dans la définition de bon quotient découle des conditions (i) et (ii).

Démonstration du théorème :

$$R^G \hookrightarrow R \xrightarrow{E_R} R^G$$

naturalité de $E_\bullet \Rightarrow \forall (a,b) \in R^G \times R, \quad E_R(ab) = a\, E_R(b)$

$$\{\text{idéaux de } R^G\} \longrightarrow \{\text{idéaux } G\text{-inv. de } R\} \longrightarrow \{\text{idéaux de } R^G\}$$

$$J \longmapsto J.R := \Big\{ \sum_\alpha j_\alpha r_\alpha \Big\}$$

$$I \longmapsto I \cap R^G$$

Fait clé : Pour tout idéal J de R^G, on a : $J.R \cap R^G = J$

Dém. : $\supset$ ✓

Réciproquement, si $j = \sum_\alpha \underset{J}{j_\alpha}\, \underset{R}{r_\alpha} \in R^G$, alors $j = E_R(j) = \sum_\alpha \underset{J}{j_\alpha}\, \underset{R^G}{E_R(r_\alpha)} \in J$ $\square$

Comme R est noethérien, R^G aussi est noethérien.

<u>Rappel</u> : $\left[\begin{array}{l} A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{anneau gradué} \\ A \text{ noeth.} \Longleftrightarrow A_0 \text{ noeth.} + A \;\; A_0\text{-algèbre de type fini.} \end{array} \right.$

On a donc : R^G k-algèbre de type fini lorsque la condition suivante est satisfaite :

$(*)$ $\left\{ \begin{array}{l} R \text{ est muni d'une graduation } G\text{-invariante } R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n \\ \quad \text{t.q. } R_0^G \text{ soit une } k\text{-algèbre de type fini.} \end{array} \right.$

(Appliquer le rappel à $A = R^G$, $A_n = R_n^G$, ...)

Réduction à l'hypothèse $(*)$:

On choisit $V \hookrightarrow k[X]$ un G-sous-module de dimension finie qui engendre $k[X]$ comme k-algèbre, et on considère le morphisme surjectif de k-alg :

$$\mathrm{Sym}\, V \twoheadrightarrow k[X] = R$$

$$\underset{\substack{\text{muni d'une action} \\ \text{de } G}}{\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}\, V) =: \mathbb{V}(V)} \hookleftarrow X = \mathrm{Spec}\, R$$

G-équivariant

On peut appliquer le cas particulier à $X = \mathbb{V}(V)$.

On a donc $k[\mathbb{V}(V)]^G = (\mathrm{Sym}\, V)^G$ k-alg. de type fini.

De plus, comme G est lin^t réductif, $(\mathrm{Sym}\, V)^G \twoheadrightarrow R^G$ et donc R^G est aussi une k-alg. de type fini.

Soit $\varphi : X = \operatorname{Spec} R \longrightarrow Y := \operatorname{Spec} R^G$ défini par $R^G \hookrightarrow R$.

c'est un morphisme de k-schémas affines de type fini qui est G-invariant et dominant : $\overline{\varphi(|X|)} = |Y|$.

c'est un bon quotient :

(i) φ est surjectif

$y \in Y(k)$ $\quad I_y \subsetneq R^G \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\parallel \\ I_{\varphi^{-1}(y)}}}{I_y \cdot R} \subsetneq R$ donc $\varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$

(ii) compatibilité de "$R \to R^G$" à la localisation

(iii) exercice : utiliser E_R

5. GIT projective

G linéairement réductif

Cas particulier : V G-module de dimension finie

$\rightsquigarrow$ G agit sur $\mathbb{P}(V)$ "=" $(V \setminus \{0\})/k^\times$

En fait, général ☺

Exemple classique: $G = SL_{N+1}$ agissant sur $V := k[X_0, \dots, X_N]_d$

formes $N+1$-aires

$N+1$-ary $\underbrace{\text{quantics}}_{=d}$

par changement de coordonnées : $gF := F(g^{-1}.)$

$$\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1} = \{\text{hypersurfaces de degré } d \text{ dans } \mathbb{P}^N\}.$$

$$k[V] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} k[V]_i \qquad k[V]_i := S^i V^\vee$$

G

$\rightsquigarrow$ action de G sur V vu comme schéma affine

On sait : $k[V]^G = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} k[V]_i^G$ est une k-algèbre de type fini

$= k[V /\!/ G]$

Observation : les actions de G et de $\mathbb{G}_m$ par homothéties sur V commutent ;
$\rightsquigarrow$ on peut "fabriquer un quotient de $\mathbb{P}(V)$ par G" en quotientant $V/\!\!/G$ par l'action de $\mathbb{G}_m$.

$[\mathbb{P}(V) = \operatorname{Proj} k[V]]$

$$\mathbb{P}(V)/\!\!/G := \operatorname{Proj} k[V]^G = \operatorname{Proj} \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} k[V]_i^G = \operatorname{Proj} \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} k[V]_{ri}^G$$

pour tout $r \in \mathbb{N}_{>0}$.

- r très divisible $\Rightarrow$ $k[V]_r^G$ engendre la k-algèbre $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} k[V]_{ri}^G$
  $(I_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq A}$ base de $k[V]_r^G$.

- $I := \bigoplus_{i \geq 1} k[V]_i^G \cdot k[V]$ idéal homogène de $k[V]$ définit
  $\mathcal{N} \hookrightarrow V$ "cône nul".

NB : $q : V \to V/\!\!/G$ $\qquad \mathcal{N} = q^{-1}(q(0))$.

$$\mathbb{P}(V)_{ss} := \mathbb{P}(V \setminus \mathcal{N}) \underset{G \text{ inv}}{\overset{\circ}{\hookrightarrow}} \mathbb{P}(V)$$

L'injection d'algèbres graduées $k[V]^G \hookrightarrow k[V]$ induit un morphisme de schémas projectifs $\varphi : \mathbb{P}(V)_{ss} \longrightarrow \mathbb{P}(V)/\!\!/G$.

<u>Théorème</u> : $\varphi : \mathbb{P}(V)_{ss} \longrightarrow \mathbb{P}(V)/\!\!/G$ est un bon quotient de $\mathbb{P}(V)_{ss}$ par G.

Concrètement :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}(V)_{ss} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rddd] & \mathbb{P}(V)/\!\!/G \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
x \in V \setminus \mathcal{N} & {[x]} \arrow[rddd, mapsto] & \mathrm{Proj} \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} k[V]^G_{ri} \arrow[d, "f"] \\
 & & \mathrm{Proj}\, \mathrm{Sym}\, k[V]^G_r \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
 & & \mathbb{P}^A \\
 & & (I_0(x) : \ldots : I_A(x))
\end{tikzcd}$$

6. Le critère de Hilbert-Mumford

Problème : comment déterminer le cône nul

$$\mathcal{N} := \{ v \in V \mid \forall i \geq 1, \forall P \in k[V]_i^G, P(v) = 0 \} = \bigcap_{0 \leq \alpha \leq A} (I_\alpha = 0)$$

ou encore $\mathbb{P}(V)_{ss} = \mathbb{P}(V \setminus \mathcal{N})$

sans avoir à calculer les $k[V]_i^G$, ou encore r et une base $(I_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq A}$ de $k[V]_r^G$?

Observations :

(a) $q : V \longrightarrow V /\!/ G$ bon quotient

$$\mathcal{N} := q^{-1}(q(0)) = \{ v \in V \mid 0 \in \overline{G(k) . v} \}$$

(b) Lorsque de plus $G = \mathbb{G}_m$, on peut écrire :

$$V = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} V_a \longleftarrow \text{décomposition en somme directe (finie !) de } \mathbb{G}_m\text{-modules}$$

avec : $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall (t, v) \in \underset{\substack{\uparrow \\ k^\times}}{G(k)} \times V_a , \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{action}}}{t . v} = t^a v$

Pour tout $v = (v_a)_a \in V = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} V_a$, on a :

$$0 \in \overline{\mathbb{G}_m(k) \cdot v} \iff \{a \in \mathbb{Z} \mid v_a \neq 0\} \text{ est contenu dans } \mathbb{Z}_{>0} \text{ ou dans } \mathbb{Z}_{<0}.$$

(c) $X_*(G) := \mathrm{Hom}_{k\text{-}gp}(\mathbb{G}_m, G)$ "co-caractères".

Pour tout $v \in V$,

$$[\exists \lambda \in X_*(G),\ 0 \in \overline{\mathbb{G}_m(k) \cdot_\lambda v}] \Rightarrow 0 \in \overline{G(k) \cdot v}$$

où $t \cdot_\lambda v := \lambda(t) \cdot v$ action de G

<u>Théorème</u> (critère de Hilbert-Mumford) :

Pour tout $v \in V$,

$$[\exists \lambda \in X_*(G),\ 0 \in \overline{\mathbb{G}_m(k) \cdot_\lambda v}] \iff 0 \in \overline{G(k) \cdot v}$$

<u>Reformulations</u> :

$$\bigcup_{\lambda \in X_*(G)} \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}$$

$$\bigcap_{\lambda \in X_*(G)} \mathbb{P}(V)_{\lambda, ss} = \mathbb{P}(V)_{ss}$$

Idée de la preuve de H.-M. :

$$k[[t]] := \{ \sum_{n \geq 0} x_n t^n \}$$
$$k[[t]][t^{-1}] := \mathrm{Frac}\, k[[t]] = \{ \sum_{n \gg -\infty} x_n t^n \}$$

- $0 \in \overline{G(k).v} \iff \exists\, \gamma(t) \in G(k[[t]][t^{-1}]),\ 0 = \text{"}\lim_{t \to 0} \gamma(t).v\text{"}.$

- décomposition de Cartan-Iwahori-Matsumoto.

$$X_*(G) = \mathrm{Hom}_{k\text{-gp}}(\mathbb{G}_m, G) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-sch}}(\mathbb{G}_m, G) = G(k[t,t^{-1}])$$
$$\hookrightarrow G(k[[t]][t^{-1}])$$

Théorème : $G(k[[t]][t^{-1}]) = G(k[[t]]) . X_*(G) . G(k[[t]])$.

N.B. : Lorsque $G = GL_N$ ou SL_N, c'est une conséquence du théorème des diviseurs élémentaires appliqué à l'anneau de valuation discrète $k[[t]]$.

Avant de passer à des applications concrètes de H.-M., signalons quelques développements de la théorie géométrique des invariants :

(1) La construction du bon quotient $\mathbb{P}(V) /\!/ G$ de $\mathbb{P}(V)_{ss}$ se généralise à la situation d'un schéma quasi-projectif X muni d'une action de G et d'une G-<u>linéarisation</u>, c'est-à-dire d'un fibré en droites L G-équivariant sur X.
Lorsque X est projectif et L est ample, le critère de H.-M., convenablement énoncé, reste valable.

(2) La notion de point <u>proprement stable</u>, plus forte que celle de point semi-stable, permet de construire des <u>quotients géométriques</u> comme restrictions de bons quotients à des ouverts Zariski (denses lorsque G agit avec un groupe d'isotropie générique fini).

7. Semi-stabilité des hypersurfaces projectives

"Exemple classique" $\quad G = SL_{N+1}$ agissant sur $V := k[X_0, \dots, X_N]_d$

par changement de coordonnées : $gF := F(g^{-1}.)$

$$\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1} \simeq \{\text{hypersurfaces de degré } d \text{ dans } \mathbb{P}^N\}$$

$$[F] \longleftrightarrow (F=0)$$

Comprendre $\mathbb{P}(V)_{ss}$ en termes de la géométrie des hypersurfaces ?

Une réponse complète n'est connue que pour (N,d) "petit", et devient très complexe lorsque (N,d) croît.

On souhaite donc établir des conditions suffisantes simples assurant qu'une hypersurface est semi-stable.

Théorème (..., Mumford) :

$d \geq 2 \Rightarrow$ toute hypersurface lisse est semi-stable.

<u>T. M.</u> A note on the semistability of singular projective hypersurfaces
<u>Math. Zeitschrift</u> (2024), 306 : 67 -

<u>Théorème</u> : $F \in k[X_0, \dots, X_N]_d \setminus \{0\}$; $H := (F=0) \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k$

$\delta := \max\{\mathrm{mult}_x H,\ x \in H(k)\}$

$s := \dim H_{\mathrm{sing}}$

$d \geq \delta \min(N+1, s+3) \Rightarrow H$ semi-stable

$\left.\begin{array}{l} N \geq 2 \text{ et } d \geq 3 \\ \text{singularités de } H \text{ nodales} \end{array}\right\} \Rightarrow H$ semi-stable

Preuve repose sur H.-M. + arguments combinatoires.
Cas général : utilise un résultat dû à O. Benoist, dans
<u>Quelques espaces de modules d'intersections complètes lisses qui sont quasi-projectifs</u> J.E.M.S. (2014), 16, 1749-1774

Cas particulier, indépendant du résultat de O. Benoist :

$$\left.\begin{array}{l} N \geq 2 \qquad d \geq N+1 \\ \text{singularités de } H \text{ nodales} \end{array}\right\} \Rightarrow H \text{ semi-stable}.$$

$H = (F = 0)$

① <u>Reformulation de H.-M.</u>

H semi-stable / action de SL_{N+1}

$\Leftrightarrow \forall \lambda : \mathbb{G}_m \to SL_{N+1} \in X_*(SL_{N+1})$,

$[F]$ semi-stable / action $\cdot_\lambda$ de $\mathbb{G}_m$

$\Leftrightarrow \forall \lambda \in X_*(SL_{N+1})$,

$$\lim_{t \to 0} F \circ \lambda(t)^{-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \infty} F \circ \lambda(t)^{-1} \neq 0$$

$\Leftrightarrow \forall \lambda \in X_*(SL_{N+1})$, $\lim_{t \to 0} F \circ \lambda(t)^{-1} \neq 0$

Après un changement de base dans k^{N+1}, on peut supposer :

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{\alpha_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^{\alpha_N} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^{N+1} \\ \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 0 \quad , \quad \alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N \end{array}$$

$$F = \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |I| = d}} a_I X^I \qquad F \circ \lambda(t)^{-1} = \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |I| = d}} a_I t^{-\langle \alpha, I \rangle} X^I$$

$$\langle \alpha, (i_0, \dots, i_N) \rangle := \alpha_0 i_0 + \dots + \alpha_N i_N$$

On pose $\deg_\alpha X^I := \langle \alpha, I \rangle$

$$\deg_\alpha F := \max_{a_I \neq 0} \langle \alpha, I \rangle$$

On a : $\lim\limits_{t \to 0} F \circ \lambda(t)^{-1} \neq 0 \iff \deg_\alpha F \geqslant 0$.

② Montrons que lorsque $N \geq 2$: $d \geqslant N+1$ + H nodale $\Rightarrow \deg_\alpha F \geq 0$.
On va montrer plus précisément que, si $O := (0 : \dots : 0 : 1)$ $(\in \mathbb{P}^N(k))$,
on a :

$$O \notin H(k) \Rightarrow \deg_\alpha F \geqslant 0$$

$$\left.\begin{array}{l} O \text{ point lisse de } H \\ d \geqslant N+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \deg_\alpha F \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} O \text{ singularité nodale de } H \\ d \geqslant N+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \deg_\alpha F \geq 0$$

- $O \notin H(k) \iff F(0,\dots,0,1) \neq 0 \iff a_{(0,\dots,0,d)} \neq 0$

  $\Rightarrow \deg_\alpha F \geq \langle \alpha, (0,\dots,0,d)\rangle = d\alpha_N \geq 0$

- $F(x_0,\dots,x_{N-1},1) = a_{(0,\dots,0,d)} + \sum_{i=0}^{N-1} a_{(0,\dots,\overset{i}{1},\dots,d-1)}\, x_i + (\text{ordre} \geq 2)$

  $O \in H_{reg}(k) \iff a_{(0,\dots,0,d)} = 0$ et $\exists\, i \in \{0,\dots,N-1\},\ a_{(0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,d-1)} \neq 0$

  $\Rightarrow \deg_\alpha F \geq \langle \alpha, (0,\dots,0,1,0,\dots,d-1)\rangle = \alpha_i + (d-1)\alpha_N$

  $\alpha_0 \leq \alpha_i \rightsquigarrow \geq \alpha_0 + (d-1)\alpha_N \quad \left(-\sum_{i=0}^{N}\alpha_i\right) = -\sum_{i=1}^{N-1}\alpha_i + (d-2)\alpha_N$

  $d \geq N+1 \rightsquigarrow \geq -\sum_{i=1}^{N-1}\alpha_i + (N-1)\alpha_N = \sum_{i=1}^{N-1}(\alpha_N - \alpha_i) \geq 0$

• Lorsque $O \in H_{sing}(k)$,

$$F(x_0, \dots, x_{N-1}, 1) = \underbrace{\sum_{0 \leq i < j \leq N-1} a_{(0,\dots,0,1,0,\dots,0,1,0,\dots,0,d-2)}\, x_i x_j + \sum_{0 \leq \ell \leq N-1} a_{(0,\dots,0,2,0,\dots,0,d-2)}\, x_\ell^2} + (\text{ordre} \geq 3)$$

On a donc

O singularité nodale de H $\iff$ cette forme quadratique en $(x_0, \dots, x_{N-1})$ est non dégénérée

$\Rightarrow$ la variable x_{N-1} y apparaît

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists\, i \in \{0, \dots, N-2\},\ a_{(0,\dots,0,1,0,\dots,0,1,d-2)} \neq 0 \\ \text{ou} \\ a_{(0,\dots,0,2,d-2)} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists\, i \in \{0, \dots, N-1\},\ \deg_\alpha F \geq \alpha_i + \alpha_{N-1} + (d-2)\alpha_N$$

$$\geq \alpha_0 + \alpha_{N-1} + (d-2)\alpha_N \quad \left(-\sum_{i=0}^{N} \alpha_i\right)$$

$d \geq N+1,\ \alpha_i \leq \alpha_N \quad \rightsquigarrow \quad \geq -\sum_{i=1}^{N-2} \alpha_i + (N-2)\alpha_N \geq 0$

Pour en savoir plus sur la théorie géométrique des invariants :

Dolgachev , Lectures on invariant theory , 2003

Hoskins , Moduli problems and geometric invariant theory , 2016
https://www.math.ru.nl/~vhoskins

Mukai , An introduction to invariants and moduli , 2003