Dernier exemple : le même β pour tout le monde !

avec la f.g.m

$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1 \ldots n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, $\beta > 0$.

indépendantes.

$e^{-(\beta - t)x}$

$$\varphi_{X_i}(t) = \mathbb{E}[\underbrace{e^{tX_i}}_{\geq 0}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{\beta^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \underbrace{x^{\alpha_i - 1} e^{-\beta x}} \mathbb{1}_{\{x>0\}} \, dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{\alpha_i - 1} e^{-(\beta - t)x} \, dx}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \dfrac{\Gamma(\alpha_i)}{(\beta - t)^{\alpha_i}} = \left(\dfrac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_i} & \text{si } t < \beta \\ +\infty & \text{si } t \geq \beta \end{cases}$$

Ainsi, si l'on pose $S = X_1 + \dots + X_n$, on obtient :

$$\varphi_S(t) = \varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) \underset{\text{ind.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} & \text{si } t<\beta \\ +\infty & \text{si } t \geq \beta \end{cases}$$

<u>Conclusion :</u> $S \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$

[car la <u>f.g.m.</u> caractérise la loi.

b. <u>via la convolution.</u>

<u>Déf :</u> Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. On pose $f * g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ la convolée de f et de g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt$$

Soit $p, q : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$. On pose $p *_{\mathbb{Z}} q : \mathbb{Z} \to [0, +\infty]$ la convolée discrète de p et de q :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (p *_{\mathbb{Z}} q)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} p(m) q(n-m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} p(n-m) q(m)$$

$$= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} p(i) q(j) \mathbb{1}_{\{i+j=n\}}$$

- Ces deux opérations, $*$ et $*_{\mathbb{Z}}$, sont commutatives, associatives.

$$f * g = g * f \qquad f * (g * h) = (f * g) * h$$

- Aussi, si f et g sont intégrables, alors $(f*g)$ est encore intégrable.

(EXO!)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)dx = \dots = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$$

Proposition : Soit $X_1, \dots, X_n$ des VAR indépendantes, ou bien toutes discrètes ou bien toutes à densité.

- Dans le cas discret, si $p_{X_i}(j) = \mathbb{P}(X_i = j)$, $j \in \mathbb{Z}$, est la fonction de masse de X_i, pour $i = 1 \dots n$, alors S admet la fonction de masse :

$$\left(p_{X_1} *_{\mathbb{Z}} \cdots *_{\mathbb{Z}} p_{X_n} \right) \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Dans le cas à densité, si X_i admet la densité f_{X_i}, pour $i = 1 \dots n$, alors S admet la densité

$$f_{X_1} * \dots * f_{X_n}$$

Dém : on traite le seul cas à densité. On s'intéresse au cas $n = 2$ (ensuite, récurrence finie).

On se donne X et Y indépendantes, de densités resp. f_X et f_Y et on pose $S = X + Y$.

$t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(S \leq t) = \mathbb{P}(X + Y \leq t)$ $\dots = \int_{-\infty}^{t} \text{qqc}\, dx$

$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X+Y\leq t\}}]$

$$= \mathbb{P}((X,Y)\in \Delta_t) \qquad \Delta_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y\leq t\}$$

$$= \iint \mathbb{1}_{\Delta_t}(x,y)\ \boxed{f_X(x)\,f_Y(y)}\ dx\,dy$$

indépendance !

$$= \iint \mathbb{1}_{\{x+y\leq t\}}\ f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{\underbrace{x+y}_{=z \text{ à } y \text{ fixé}}\leq t\}}\ f_X(x)\,dx\right) f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{z\leq t\}}\ f_X(z-y)\,dz\right) f_Y(y)\,dy$$

$$\underset{\substack{\text{Fubini}\\ \geq 0}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{z\leq t\}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)\,dy\right)}\ dz$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \underbrace{(f_X * f_Y)(z)}_{\text{densité de } S\ !}\ dz$$

Quelques exemples :

- $X, Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$. indépendantes $\qquad f_X(x) = f_Y(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

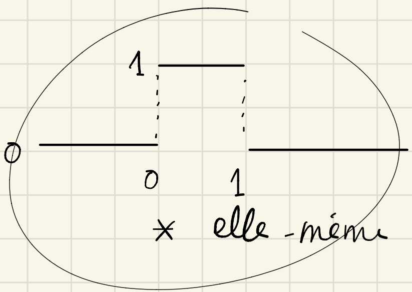
$$(f_X * f_Y)(y) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, f_Y(y-x)\, dx$$

$$= \int \mathbb{1}_{\{0<x<1\}}\, \mathbb{1}_{\{0<y-x<1\}}\, dx$$

$$= \int \mathbb{1}_{\{0<x<1,\ y-1<x<y\}}\, dx$$

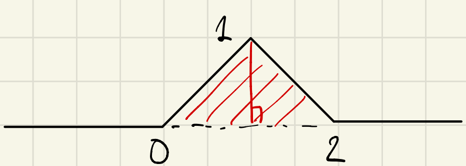
$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{0<x<y\}}\, dx + \mathbb{1}_{]1,2]}(y) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y-1<x<1\}}\, dx$$

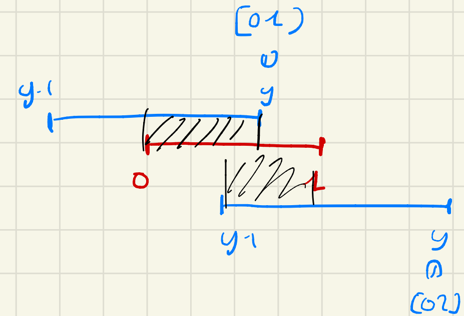
$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\; y + \mathbb{1}_{]1,2]}(y)\,(2-y)$$



$*$ elle-même

||





• $X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, indépendantes.

⚠ dm

$$f_X * f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(y-x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x>0\}} \cdot \lambda e^{-\lambda(y-x)} \mathbb{1}_{\{y-x>0\}}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\{0<x<y\}}\,dx$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda y} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{0<x<y\}}\,dx}_{= y \mathbb{1}_{\{y>0\}}}$$

$$= \mathbb{1}_{\{y>0\}} \lambda^2 y e^{-\lambda y}$$

$$= \mathbb{1}_{\{y>0\}} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}$$, càd $X+Y \sim \Gamma(2, \lambda)$

avec $\underline{\alpha = 2}$

($\underline{Rq}$: $\mathrm{Exp}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$)

Chapitre IV — SUITES DE VAR ET THEOREMES LIMITES.

I. Convergence de suites de VAR.

1. Les différents modes et leurs relations.

Déf :

- On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de VAR converge en loi vers X, et on note $X_n \xrightarrow{loi} X$, si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ tq } \boxed{\mathbb{P}(X=t)=0 \quad (t \notin S_X)}, \quad \boxed{\mathbb{P}(X_n \le t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X\le t)}$$

- On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de VAR converge en probabilité vers X, et on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, si :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \boxed{\mathbb{P}(|X_n - X|>\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

- On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de VAR converge dans L^p, $p>0$, s'il existe $X\in L^p$: $\mathbb{E}[|X|^p]<+\infty$ tel que :

$$\boxed{\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \longrightarrow 0}$$

On note alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Voyons les liens entre ces modes de convergence.

Prop : La convergence dans L^p implique la cvg en probabilité.

La convergence en probabilité implique la cvg en loi.

$$(X_n \xrightarrow{L^p} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{\text{loi}} X).$$

$p>0$

dém :

- $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X|^p > \varepsilon^p) \leq \dfrac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

pour $\varepsilon>0$ fixé.

- Pour la deuxième implication, on se donne $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

ce qu'on veut :

$t \in \mathbb{R}$, on veut borner $|\mathbb{P}(X_n \leq t) - \mathbb{P}(X \leq t)| \leq \ldots \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?

[$\hookrightarrow$ tel que $\boxed{\mathbb{P}(X=t)=0}$.

ce qu'on sait : $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\forall \varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}(X_n \leq t) \underset{\text{proba totale}}{=} \mathbb{P}(X_n \leq t, |X - X_n| > \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq t, |X - X_n| \leq \varepsilon)$$

$-\cancel{\varepsilon \leq}\ X - X_n \leq \varepsilon$

càd $X \leq X_n + \varepsilon$

$$\leq \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) + \mathbb{P}(X \leq t + \varepsilon)$$

$$\mathbb{P}(X_n \leq t) - \mathbb{P}(X \leq t+\varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon)$$

$$\mathbb{P}(X_n \leq t) - \mathbb{P}(X \leq t) \leq \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) + \mathbb{P}(t < X \leq X + \varepsilon)$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(X_n \leq t) - \mathbb{P}(X \leq t)\right) \leq 0 + \underbrace{\mathbb{P}(t < X \leq X + \varepsilon)}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0}$$

($u_n \leq v_n \Rightarrow \limsup_n u_n \leq \limsup v_n$

$\limsup_n u_n \overset{\text{déf}}{=} \lim_n \downarrow \left(\sup_{k \geq n} u_k\right)$)

($\limsup u_n = 1$, $\liminf u_n = -1$

$u_n = (-1)^n$)

$$\liminf_n u_n = \lim_n \uparrow \left(\inf_{k \geq n} u_k \right)$$

$$\liminf u_n \leq \limsup u_n$$

on a toujours existence.

Maintenant, $\underbrace{\varepsilon = \frac{1}{m}}$, $\lim_{m \to +\infty} \downarrow \mathbb{P}\left(t < X \leq t + \frac{1}{m}\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{m \geq 1} \left\{ t < X \leq t + \frac{1}{m} \right\} \right) = \mathbb{P}\left(\{ \underbrace{t < X \leq t}_{\emptyset} \} \right) = 0$$

Ainsi, $\limsup_{n \to +\infty} \left| \mathbb{P}(X_n \leq t) - \mathbb{P}(X \leq t) \right| \leq 0$

- Dans l'autre sens,

$$\mathbb{P}(X \leq t - \varepsilon) = \mathbb{P}(X \leq t - \varepsilon, |X_n - X| > \varepsilon) + \mathbb{P}(X \leq t - \varepsilon, |X_n - X| \leq \varepsilon)$$

$$\leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq t)$$

$$\mathbb{P}(X \leq t - \varepsilon) - \mathbb{P}(X_n \leq t) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

$$\mathbb{P}(X\leq t) - \mathbb{P}(X_n\leq t) \leq \underbrace{\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)}_{\substack{\downarrow n\to+\infty \\ 0}} + \mathbb{P}(t-\varepsilon < X \leq t).$$

vraiment besoin ?

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(X\leq t) - \mathbb{P}(X_n\leq t)\right) \leq \underline{\mathbb{P}(t-\varepsilon < X \leq t)}$$

A nouveau, $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $m \geq 1$

$$\lim_{m\to+\infty} \downarrow \mathbb{P}(t-\tfrac{1}{m} < X \leq t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geq 1} \{t-\tfrac{1}{m} < X \leq t\}\right) = \mathbb{P}(t \leq X \leq t) = \mathbb{P}(X = t)$$

$= 0$ car $t \notin S_X$

ainsi $\limsup_{n} \underbrace{|\mathbb{P}(X\leq t) - \mathbb{P}(X_n\leq t)|}_{\geq 0} = 0$

donc $\lim \mathbb{P}(X_n\leq t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X\leq t)$

$\square$

- Notons maintenant que quelque soit le mode de convergence, la limite est unique.

- Unicité de la limite en loi.

Supposons $X_n \xrightarrow{loi} X$ et $X_n \xrightarrow{loi} Y$.

Alors $\begin{cases} \mathbb{P}(X_n \leq t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X \leq t), & \forall\, t \notin S_X \\ \mathbb{P}(X_n \leq t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(Y \leq t), & \forall\, t \notin S_Y \end{cases}$

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus (S_X \cup S_Y)$, on a convergence de la suite numérique $\mathbb{P}(X_n \leq t)$ vers $\mathbb{P}(X \leq t)$ et $\mathbb{P}(Y \leq t)$, d'où $\boxed{\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(Y \leq t)}$. $(*)$

$S_X \cup S_Y$ est dénombrable donc $\mathbb{R} \setminus (S_X \cup S_Y)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, si $t \in S_X \cup S_Y$, t peut être approché par une suite (t_n) $\searrow$ strict. décroissante d'éléments de $\mathbb{R} \setminus (S_X \cup S_Y)$, pour lesquels $(*)$ vaut. Par continuité à droite de la FdR on a donc (*) en t.

donc $X \overset{loi}{=} Y$ puisque la FdR caractérise la loi.

Unicité de la limite en proba.

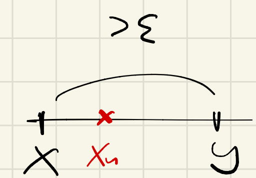
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$

alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) \longrightarrow 0$$

$$\mathbb{P}(|X - Y| > \varepsilon) \leq \underbrace{\mathbb{P}\left(|X - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{\mathbb{P}\left(|Y - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\downarrow \atop 0}$$

X_n



$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \mathbb{P}(|X - Y| > 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m \geq 1} \left\{|X - Y| > \frac{1}{m}\right\}\right)$$

$$= \lim_m \uparrow \underbrace{\mathbb{P}\left(|X - Y| > \frac{1}{m}\right)}_{= 0} = 0$$

$\mathbb{P}(X = Y) = 1$: X et Y sont égales ps.

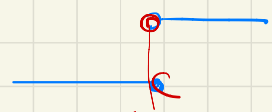
Unicité de la limite L^p : $X_n \xrightarrow{L^p} X$, $X_n \xrightarrow{L^p} Y$

on en tire $X_n \xrightarrow{P} X$ et $X_n \xrightarrow{P} Y$ et du paragraphe ci-dessus

$X = Y$ p.s.

- **3 exemples :** (1) $X_n = \frac{1}{n}$ (va constante, de loi $\delta_{1/n}$).
- Mq $X_n \xrightarrow{loi} 0$

$t \in \mathbb{R}$. $P(X_n \leq t) = \mathbb{1}_{\{\frac{1}{n} \leq t\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{\{0 < t\}}$



n'est pas une FdR. (pas càd en 0)

mais : $\underbrace{\forall t \neq 0}_{\notin S_X \text{, où } X \sim \delta_0}$; $P(X_n \leq t) \longrightarrow \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$ FdR de δ_0

MASSE DE DIRAC EN 0

$p \geq 0$

- On peut aussi noter $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ puisque $E[|X_n - 0|^p] = \left(\frac{1}{n}\right)^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $X_n \xrightarrow{P} 0$ et $X_n \xrightarrow{loi} 0$

② $X_n \sim Ber(1/2)$ indépendantes, $X \sim Ber(1/2)$

$X_n \overset{loi}{=} X$ donc $\boxed{X_n \xrightarrow{loi} X.}$

mais on n'a pas convergence en proba : montrons le !

$X_{n+1} - X_n \in \{-1, 0, 1\}$ avec $\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = 1/4 \\ \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 0) = 1/2 \\ \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = 1/4 \end{cases}$

mais si on avait $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ alors on aurait

$\mathbb{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) \to 0$ et $\mathbb{P}(|X_{n+1} - Y| > \varepsilon) \to 0$

donc $\mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| > 2\varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_{n+1} - Y| > \varepsilon) \to 0$

$0 < \varepsilon < 1/2$: absurde $(\mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| = 1) = 1/2)$.

③ $X_n = n^\alpha \cdot B_n$, où $B_n \sim Ber(1/n)$, $\alpha > 0$.

$\mathbb{E}[|X_n - 0|^p] = \mathbb{E}[X_n^p] = n^{\alpha p}\, \mathbb{E}[B_n^p] = n^{\alpha p}\, \mathbb{E}[B_n]$

pourquoi pas vers autre chose pour $\alpha < 1/p$

$= n^{\alpha p} \cdot \frac{1}{n} = n^{\alpha p - 1}$ donc on n'a pas convergence vers 0 ds L^p si $\alpha p \geq 1$ càd $\alpha \geq 1/p$.

$\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \neq 0) = \mathbb{P}(B_n = 1) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc cvg vers 0 en proba, $\forall\, \alpha > 0$.