Feuille d'exercices n° 4 : VARs, loi, moments.

Exercice 1. Posons, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t > 0$ réel :

$$I(n) = \int_t^\infty \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

1. Montrer que l'on a :
$$I(n) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-t} + I(n-1).$$
2. En déduire :
$$I(n) = \sum_{k<n} e^{-t} \frac{t^k}{k!}.$$
3. Soit $X_t \sim \mathrm{Po}(t)$ et $Y_n \sim \Gamma(n,1)$. Montrer que :
$$\mathbb{P}(X_t < n) = \mathbb{P}(Y_n > t).$$

Exercice 2. 1. On cherche a caractériser l'ensemble des lois des variables aléatoires réelles X qui satisfont à l'égalité *en loi* :
$$X \overset{\text{loi}}{=} X^2.$$
   (a) Quel est le signe de X ? En déduire la fonction de répartition F de X sur $]-\infty, 0[$
   (b) Montrer que F satisfait $F(t) = F(t^2)$ pour tout $t \geq 0$.
   (c) En déduire que F est constante sur les deux intervalles $[0,1[$ et sur $[1,\infty[$
   (d) Conclure : trouver l'ensemble des lois solutions.

2. Adapter le raisonnement précédent pour les deux équations en loi suivante :
   (a)
$$X \overset{\text{loi}}{=} X^3$$
   (b) *(plus difficile, en bonus)*
$$X \overset{\text{loi}}{=} -X^3$$

Exercice 3. On se donne $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathrm{Unif}(0,1)$ et on note $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ leur réordonnancement croissant (encore appelée statistique d'ordre) ; ainsi, $X_{(1)}$ est le plus petit des $X_i, i = 1 \ldots n$, $X_{(2)}$ le deuxième plus petit...

1. Montrer que $\mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) = t^n$ pour tout $t \in [0,1]$ et en déduire que $X_{(n)}$ suit une loi Beta dont on précisera les paramètres.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X_{(n-1)} \leq t) = t^n + n(1-t)t^{n-1}$ pour tout $t \in [0,1]$ et en déduire que $X_{(n-1)}$ suit une loi Beta dont on précisera les paramètres.
3. De même, donner les lois de $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$.
4. Quel résultat peut-on conjecturer de facon plus générale au sujet de la loi de $X_{(i)}$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$?

Exercice 4. Soit $\alpha, \beta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On rappelle la définition de la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \mathrm{d}x, \qquad t > 0.$$

1. Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$
2. Calculer le n-ième moment de la loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\beta)$, c'est-à-dire $\mathbb{E}[X^n]$ si $X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$.
3. Calculer le n-ième moment de la loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$.
4. Comparez les résultats obtenus aux deux dernières questions.

Exercice 5.

1. Calculer les moments impairs de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
2. On cherche maintenant à calculer les moments pairs de $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

   $$\int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = (2n-1) \int_{\mathbb{R}} x^{2n-2} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

   (b) En déduire que le $2n$-ième moment de $\mathcal{N}(0,1)$ vaut :

   $$\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$