Partiel de Probabilité - 25/10/2024, 13h45 à 15h45.

A lire attentivement :

— *Documents non autorisés, exceptée une feuille A4 de notes manuscrites personnelles (recto uniquement, pas de photocopies, pas de feuille imprimée). Téléphones rangés !*

Chacun des 3 exercice doit être rédigé sur une copie indépendante (au total, 3 copies donc). Chaque copie doit comporter votre nom (lisible). Il n'est pas nécessaire de cacheter les copies.

Exercice 1. (Prenez une nouvelle copie)

1. Rappeler les valeurs des 4 sommes suivantes, et préciser pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{R}$ elles convergent :

$$A(z) = \sum_{k\geq 0} z^k = 1 + z + z^2 + \dots$$
$$B(z) = \sum_{k\geq 1} k z^{k-1}$$
$$C(z) = \sum_{k\geq 2} k(k-1) z^{k-2}$$
$$D(z) = \sum_{k\geq 3} k(k-1)(k-2) z^{k-3}$$

Soit $X \sim \mathrm{Geom}_{\mathbb{N}^\star}(p)$ la loi géométrique sur $\mathbb{N}^\star$ de paramètre $p \in]0,1[$, soit $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$ entier, puis Y et Z variables aléatoires de loi, pour tout $k \geq 1$ entier :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \alpha(k-1)\mathbb{P}(X = k), \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z = k) = \beta(k-1)(k-2)\mathbb{P}(X = k), \qquad (\star)$$

avec α et β deux constantes réelles.

2. Calculer $\mathbb{E}[X]$
3. Calculer α pour que la relation $(\star)$ définisse la loi d'une variable aléatoire Y.
4. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
5. Calculer β pour que la relation $(\star)$ définisse la loi d'une variable aléatoire Z.
6. Calculer $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 2. (Prenez une nouvelle copie) Pour chacune des équations qui suivent, trouver l'ensemble des solutions de l'équation en loi proposée (cet ensemble peut-être vide). On détaillera les raisonnements.

1. $X \overset{\text{loi}}{=} c + X$, pour $c \neq 0$.
2. $X \overset{\text{loi}}{=} cX$, pour $(c > 0,\, c \neq 1)$.
3. $X \overset{\text{loi}}{=} X^4$
4. $X \overset{\text{loi}}{=} \frac{1}{X^2}$.
5. On s'intéresse enfin à l'équation :
$$X \overset{\text{loi}}{=} \frac{1}{X}, \qquad (\star\star)$$
d'inconnue X telle que $\mathbb{P}(X > 0) = 1$.
   (a) Si Y est une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(Y > 1) = 1$, et B est une variable de Bernoulli de paramètre $1/2$ indépendante de Y, montrer que $BY + (1-B)/Y$ est solution de $(\star\star)$.
   (b) Décrire l'ensemble des solutions de $(\star\star)$.

Exercice 3. (Prenez une nouvelle copie) Soit X de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit a un nombre réel tel que $0 \leq a \leq 1$.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}[|X-a|] = \alpha a^2 + \beta(1-a)^2$$
pour des constantes α et β que l'on précisera.
2. En déduire que
$$a \in [0,1] \mapsto \mathbb{E}[|X-a|]$$
atteint son minimum en un unique point, et préciser la valeur de ce minimum.

Soit maintenant $0 \leq a \leq b \leq 1$ deux nombres réels. On note $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

3. Montrer que
$$\mathbb{E}[|X-a| \wedge |X-b|] = \alpha a^2 + \beta(b-a)^2 + \gamma(1-b)^2$$
pour de (nouvelles) constantes α, β et γ que l'on précisera.
4. Montrer que :
$$(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2\big(a - \frac{1}{4}\big)^2 + 2\big(b - \frac{3}{4}\big)^2 + \big((a - \frac{1}{4}) - (b - \frac{3}{4})\big)^2$$
atteint son minimum en un unique point, et préciser la valeur de ce minimum.
5. En déduire que
$$(a,b) \in [0,1]^2 \mapsto \mathbb{E}[|X-a| \wedge |X-b|]$$
atteint son minimum en un unique point, et préciser la valeur de ce minimum.
6. Bonus *(s'il reste du temps* ***uniquement****)* : étudier le problème de la minimisation de
$$(a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n \mapsto \mathbb{E}[|X-a_1| \wedge |X-a_2| \wedge \ldots \wedge |X-a_n|].$$
Interprétation : sur une route droite assimilée à $[0,1]$, X modélise le lieu de la panne, et on cherche à placer n stations-services en $a_1, \ldots, a_n$ de façon à minimiser (en espérance) la distance à la station-service la plus proche.