Liste des cours du Master AMS

Année 2024-2025

MS01 – Calcul scientifique parallèle

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 10h TD: 20h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Langue anglaise si demandé: oui
Intervenants: Axel Modave ; Nicolas Kielbasiewicz
Lieu des cours: ENSTA
Master proposant le cours: Master HPDA, porteur : AMS
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: bases d'algèbre linéaire numérique et d'algorithmique ; programmation avec le langage C++ *(suivre le cours AMS-O12 en parallèle de celui-ci est suffisant)*

Description:
Le calcul scientifique parallèle permet de résoudre des problèmes mathématiques en tirant parti de la puissance des machines de calcul parallèles *(i.e. clusters composés de plusieurs processeurs)*. Il s'agit d'un outil essentiel de la recherche et de l'industrie, utilisé dans des domaines aussi variés que la physique, le génie civil, la climatologie, l'aéronautique et la finance. Pour traiter des problèmes de taille et de complexité croissante avec précision, il est indispensable d'exploiter au mieux les architectures parallèles en adaptant les algorithmes de résolution numérique pour permettre un calcul parallèle efficace.

L'objectif de ce cours est d'introduire les aspects théoriques et pratiques du calcul scientifique parallèle à mémoire distribuée, avec un accent sur la résolution numérique parallèle de problèmes d'équations aux dérivées partielles. Le cours débutera par une introduction à l'algorithmique parallèle et à la programmation parallèle avec la bibliothèque MPI *(Message Passing Interface)*. Ensuite, on s'intéressera à la résolution parallèle efficace de systèmes linéaires de grande taille, notamment issus de discrétisation par différences finies. Enfin, on abordera la résolution de problèmes non-structurés issus de discrétisations par élements finis. Le cours comprends des TPs d'initiation à MPI en C++ et des séances de mise en œuvre parallèle.

Évaluation sur base de deux projets de calcul scientifique parallèle. Questions théoriques lors de la soutenance orale du 2e projet. *Les exercices et les projets sont réalisés en utilisant les machines personnelles des étudiant·e·s. Chaque étudiant·e doit apporter sa machine personnelle dès la première séance.*

Site Internet du cours : `https://ams301.pages.math.cnrs.fr/`

Contenu:
- Concepts de base du calcul scientifique parallèle
  - · Introduction aux architectures de calcul et aux algorithmes parallèles
  - · Algorithmes parallèles élémentaires *(intégration numérique, différences finies 1D, algèbre linéaire dense)*
  - · Analyse de la performance parallèle
- Résolution parallèle de systèmes linéaires : Méthodes directes *(factorisation LU et approches par blocs)* et Méthodes itératives *(méthodes stationnaires et instationnaires)*
- Résolution parallèle de problèmes d'équations aux dérivées partielles
  - · Systèmes linéaires issus d'une discrétisation par différences finies ou par éléments finis
  - · Introduction aux méthodes de décomposition de domaine
- Initiation à la programmation parallèle avec MPI en C++ ; TPs et projets de calcul scientifique parallèles

Bibliographie:

- F. Magoulès, F.-X. Roux, *Calcul scientifique parallèle*, Dunod, 2013.
- Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition*, SIAM, 2003.

MS02 – Homogénéisation périodique

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 21h TD: 9h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Intervenants: François Alouges, Sonia Fliss
Lieu des cours: ENSTA
Langue anglaise si demandé: oui
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Bases d'analyse fonctionnelle et de méthodes variationnelles

Description:
Ce cours est consacré à l'introduction des concepts de base de l'homogénéisation des matériaux ayant une microstructure périodique. Lorsque la période de la microstructure est faible par rapport à la taille du matériau (par exemple, dans des mousses, des matériaux composites, etc.), la question est de savoir si on peut trouver un modèle effectif qui rend compte du comportement macroscopique de ce matériau.

Nous nous concentrons dans le cours sur les modèles qui sont donnés par une équation aux dérivées partielles (EDP) avec des coefficients périodiques. D'un point de vue mathématique, les équations et leur solution sont paramètrées par la période et le problème est d'étudier la limite, si elle existe, de la famille de solutions, quand la période tend vers 0. Est ce que cette limite est solution d'une EDP limite ? Dans ce cas, les coefficients caractérisent alors le milieu effectif.

Parmi les méthodes théoriques classiques utilisées pour étudier ce genre de problèmes, nous nous concentrons sur la méthode de développement multi-échelle et la convergence double-échelle. Ces deux méthodes donnent des résultats de différentes saveurs, heuristique ou rigoureuse, et arrivent à être très complémentaires.

En effet, la méthode de développement multiéchelle fonctionne en postulant un ansatz pour la solution : celle-ci se développerait comme une série où chacun des termes sont recherchés les uns après les autres. L'existence d 'un tel développement est possible sous certaines hypothèses sur les coefficients. D'autre part, la théorie de la convergence double-échelle de N'Guetseng et Allaire permet une approche complète et rigoureuse, sous des hypothèse beaucoup moins restrictives.

Nous prévoyons également de fournir aux étudiants quelques éléments sur la Gamma convergence qui sont liés au sujet.

Des séances de travaux pratiques sont prévues.

L'évaluation se fera par les comptes rendus de TP et un examen écrit à la dernière séance.

MS03 – Méthodes variationnelles pour l'analyse et la résolution de problèmes non coercifs

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Intervenants: Anne-Sophie Bonnet Ben Dhia, Patrick Ciarlet
Lieu des cours: ENSTA
Langue anglaise si demandé: Oui
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Analyse fonctionnelle appliquée, formulations variationnelles, analyse numérique élémentaire

Description:
On s'intéressera à la résolution théorique et numérique des problèmes linéaires issus de la modélisation de phénomènes physiques divers, s'écrivant sous la forme d'équations aux dérivées partielles complétées de conditions aux limites. On traitera principalement les modèles suivants, en domaine borné : diffusion, équation de Helmholtz, problèmes avec contraintes (équation de Stokes), et enfin un problème plus exotique, issu de la modélisation de milieux non-standards en électromagnétisme, où les coefficients de l'équation changent de signe dans le domaine. On expliquera pourquoi l'étude de ces problèmes ne peut pas systématiquement être menée à l'aide des outils classiques, vus en première année de master, comme le théorème de Lax-Migram pour la formulation continue ou le lemme de Céa pour la discrétisation. Ceci nous conduira à introduire de nouveaux outils, qui permettront d'établir des résultats similaires (caractère bien posé du problème continu, stabilité et convergence du problème discret) dans un cadre élargi. De façon plus précise, ce cours traitera des trois aspects principaux suivants :
1) construction de formulations variationnelles. Pour cela on rappellera les notions de base, autour des distributions, des espaces fonctionnels d'énergie, et des formules d'intégration par parties ;
2) résolution mathématique rigoureuse de ces formulations à l'aide du théorème de Lax-Milgram généralisé (T-coercivité), également connu sous le nom de théorie de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (condition inf-sup) ;
3) techniques de discrétisation et analyse numérique : condition inf-sup discrète (ou T-coercivité discrète), lemme de Céa généralisé, éléments finis, éléments finis mixtes, etc.

Contenu:
- Rappels d'analyse fonctionnelle
- Construction de formulations variationnelles pour la diffusion (avec une ou deux inconnues)
- Discrétisation de la diffusion : éléments finis de Lagrange, de Raviart-Thomas
- Formulation variationnelle pour l'équation de Helmholtz et sa résolution
- Problèmes mixtes, application au modèle de Stokes
- Résolution de problèmes avec changement de signe

Bibliographie:

- B. Boffi, F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods and applications*, Springer, 2013.

MS04 – Des équations intégrales aux réseaux de neurones : méthodes numériques et algorithmiques avancées

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 15h TD: 15h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Intervenants: Stéphanie Chaillat-Loseille
Lieu des cours: ENSTA
Master proposant le cours: Master HPDA, porteur : AMS
Langue anglaise si demandé: oui
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: Programmation en Matlab, Notions sur les éléments finis

Description:
Les ondes acoustiques, mécaniques et électromagnétiques sont essentielles dans de nombreux aspects de notre vie quotidienne. Les ondes sonores facilitent la communication et les diagnostics médicaux. Les ondes mécaniques aident à comprendre les tremblements de terre et à concevoir des structures sûres. Les ondes électromagnétiques permettent les télécommunications et l'imagerie médicale. Dans ce cours nous présenterons une méthode numérique particulièrement adaptée à la simulation de la propagation des ondes dans des domaines non bornés : la méthode des éléments de frontière (BEM pour Boundary Element Method), basée sur la reformulation de l'EDP en une équation intégrale de frontière.

Nous commencerons par établir les formules de représentation intégrale ainsi que plusieurs équations intégrales de frontière, pour les ondes acoustiques en régime harmonique. Lors des séances de TP nous mettrons en oeuvre (avec Matlab et en partant de zéro) la méthode de résolution numérique de ces équations, la BEM. Les outils utilisés seront proches des outils utilisés pour les éléments finis.

La BEM aboutit à un système plein contrairement aux éléments finis. Il faut donc développer des notions poussées en algorithmique pour pouvoir appliquer ces méthodes pour des cas réalistes. Nous présenterons ces **algorithmes modernes** de résolution rapide des BEMs : méthodes d'approximation de rang faible, méthodes de matrices hiérarchiques et méthodes multipoles rapides. Lors des séances de TP nous illustrerons l'intérêt de ces méthodes en accélérant le code BEM développé dans la première partie du cours.

Pour terminer, nous montrerons comment ces techniques peuvent être utilisées pour déterminer les architectures optimales pour les méthodes de résolution basées sur les réseaux de neurones.

L'évaluation du cours est basée sur 2 TPs à rendre (par groupes de 2) et un examen d'une heure.

Contenu:
- 1. CM et TP : Introduction et présentation des Représentations Intégrales.
- 2 et 3. TP : Mise en oeuvre de la Représentation Intégrale de frontière
- 4. CM : Présentation des Équations Intégrales de frontière. TP : Résolution numérique
- 5. CM et TP : Approximations de rang faible
- 6. CM et TP : Accélération de la BEM avec les Méthodes de matrices hiérarchiques
- 7. TP : Accélération de la BEM avec les Méthodes de matrices hiérarchiques
- 8. TP : Méthodes de matrices hiérarchiques
- 9. CM et TP : Lien entre Méthode Multipôle Rapide et architecture des Réseaux de Neurones
- 10. CM et TP : Lien entre Méthode Multipôle Rapide et architecture des Réseaux de Neurones. Examen écrit

Bibliographie:

— M. Bebendorf, *Hierarchical matrices*, Springer, 2008.
— G.H. Golub and C.H. Van Loan, *Matrix Computations*, J. Hopkins Univ. Press, 2013.
— J.-C. Nédélec, *Acoustic and Electromagnetic Equations*, Springer, 2001.
— Y. Fan, L. Lin, L. Ying, L. Zepeda-Núnez. *A multiscale neural network based on hierarchical matrices.* Multiscale Modeling & Simulation. 17(4) :1189-213, 2019.

MS05 – Problèmes inverses pour les systèmes gouvernés par des EDPs

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Intervenants: Laurent Bourgeois, Philippe Moireau
Lieu des cours: ENSTA
Langue anglaise si demandé: non
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Bonnes connaissances en analyse fonctionnelle, connaissances de base sur les équations aux dérivés partielles

Description:
Ce cours est une introduction aux problèmes inverses gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Les problèmes inverses surviennent dans de nombreux secteurs de l'industrie (contrôle non destructif, propection pétrolière, détection RADAR/SONAR,...) ou de la médecine (imagerie médicale, détection de tumeurs ou d'infarctus, assimilation de données des patients,...) ou des sciences environmentales (estimation météorologique ou climatique). Il s'agit de reconstruire des conditions aux limites (en espace et en temps) manquantes (problème de complétion de données) ou des caractéristiques du modèle (problème d'identification) dans une première zone géométrique (en général inaccessible) à partir de données surabondantes dans une seconde (accessible à la mesure). Ces problèmes inverses sont mal posés en général, les problèmes de complétion de données étant linéaires, les problèmes d'identification non-linéaires, d'où une distinction que nous faisons entre ces deux types de problème. Nous avons choisi pour décrire les problèmes inverses des outils communs avec ceux de la théorie du contrôle. Par ailleurs, on étudie principalement les aspects mathématiques, mais les méthodes proposées sont particulièrement adaptées à la résolution numérique, nécessaire à l'application concrète des méthodes de reconstruction.

Contenu:
— Rappels d'analyse fonctionnelle (opérateurs, théorie spectrale, semi-groupes)
— Problèmes linéaires mal posés et régularisation par moindres carrés (notion de problème mal posé, régularisation de Tikhonov, principe de Morozov) ;
— Problèmes de complétion de données : exemples (problèmes de Cauchy du Laplacien, équation d'évolution avec données de Cauchy latérales, équation de la chaleur rétrograde, reconstruction d'une condition initiale pour l'équation des ondes) ;
— Prolongement unique et questions d'unicité/observabilité (théorème de Holmgren et inégalité de Carleman, méthode des multiplicateurs) ;
— Problèmes de complétion de données : méthodes de résolution (approches type quasiréversibilité, contrôle optimal et variante Kohn-Vogelius, estimation variationnelle pour les problèmes d'évolution et applications á l'équation des ondes et de la chaleur) ;
— Problèmes d'identification non linéaires : exemples, questions d'unicité (problème inverse de Robin, problèmes inverses géométriques)
— Problèmes d'identification non linéaires : méthode de résolution (contrôle optimal, initiation aux lignes de niveau et à la dérivée de forme).

Bibliographie:
— A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, 1996.
— J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte Pertubations et Stabilité de systèmes distribués*, Masson, 1988.

MS06 – Techniques de discrétisations avancées pour les problèmes d'évolution

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Sébastien Imperiale, Alexandre Imperiale
Lieu des cours: ENSTA
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Méthodes numériques, analyse fonctionnelle

Description:
Ce cours a pour objectif d'apporter des éléments fondamentaux et avancées pour la simulation de phénomènes de propagation d'ondes et/ou des problèmes d'advection en régime transitoire. L'analyse mathématique présentée portera aussi bien sur les aspects continues que sur les aspects complètement discret. Les applications visées concernent les problèmes transitoires suivant : ondes acoustiques, élastodynamique, ondes électromagnétique, aéro-acoustique (ondes dans des fluides). Les thèmes abordés sont résumés ci-dessous :

- **Analyses des systèmes hyperboliques symétriques en domaine borné.**
  Résultats d'existence/unicité, analyses ondes planes, analyse par technique d'énergie.
- **Technique de discrétisation en espace.**
  Technique de Galerkin discontinus et élements finis spectraux d'ordre elevés.
- **Technique de discrétisation en temps.**
  Schémas saute-moutons, schémas d'ordre élevé (équation modifiée, Runge-Kutta).

Contenu:

— Analyses des systèmes de Friedrich et équations d'ondes par la théorie de Hille-Yosida.
— Méthode de Galerkin discontinus, analyse semi-discrète, analyse de convergence, analyse de l'effet de l'erreur de quadrature.
— Utilisation d'éléments finis d'ordre élévés appelés éléments finis spectraux.
— Schémas en temps saute-moutons, analyse de stabilité.
— Construction et analyse par énergie de méthodes de Runge-Kutta pour les systèmes de Friedrich.

Bibliographie:

— D. A. Pietro, A. Ern, Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods, Springer, 2012.
— P. Joly, Chap. IV, Effective Computational Methods in Wave Propagation, CRC Press, 2010.
— G. Cohen, Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations, Springer-Verlag, 2004.

MS07 – Analyse mathématique et résolution numérique des problèmes de diffraction en domaine non borné

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 24h TD: 3h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Anne-Sophie Bonnet Ben Dhia, Eric Lunéville
Lieu des cours: ENSTA
Master proposant le cours: AMS
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Analyse Hilbertienne, formulations variationnelles, analyse numérique élémentaire

Description:
On s'intéressera dans ce cours à la résolution de problèmes modélisant la diffraction d'une onde par un obstacle, en régime périodique établi. La difficulté principale est qu'un tel problème est posé dans un domaine non-borné, et que sa solution n'est pas de carré intégrable.

On considèrera dans le cours à la fois l'exemple le plus typique d'un obstacle borné dans l'espace libre, et celui plus spécifique où l'obstacle est placé dans un guide d'ondes infini. Ces deux configurations ont leur intérêt du point de vue des applications, aussi bien en électromagnétisme qu'en acoustique. Le cas des guides d'ondes présente un intérêt pédagogique, parce que les calculs peuvent y être menés de façon simple, et que certains phénomènes exotiques s'y produisent. On montrera comment formuler les problèmes de diffraction dans un domaine de calcul borné, en écrivant sur la frontière artificielle une condition transparente de type Dirichlet-to Neumann (DtN). On montrera ensuite que ces formulations relèvent de l'alternative de Fredholm, et on verra quels résultats de stabilité peuvent en être déduits. Enfin, on présentera différentes approches pour approcher numériquement de tels problèmes (condition aux limites de type DtN approchées, couches PML), et on établira des estimations de l'erreur due aux paramètres de discrétisation.
L'évaluation se fera par un examen écrit et le compte rendu d'un TP.

Contenu:
- Problème de diffraction, champs incident, total et diffracté, condition de rayonnement de Sommerfeld.
- Guides d'ondes, modes propagatifs et évanescents, condition de rayonnement modale.
- Approx. de la condition transparente par une condition de Robin, alternative de Fredholm, th. de Holmgren.
- Condition transparente dans les guides d'ondes, opérateur de DtN, principe d'absorption limite.
- Condition transparente de type DtN pour l'espace libre, alternative de Fredholm, théorème de Rellich.
- Cas de non-unicité, modes piégés dans les guides d'ondes, conditions DtN avec recouvrement.
- Opérateur DtN approché, estimation d'erreur en fonction du nombre de modes conservés.
- Formulation avec couches PML dans un guide d'ondes, alternative de Fredholm, estimation d'erreur en fonction de l'épaisseur des couches. PML radiales et cartésiennes pour l'espace libre.
- Mise en oeuvre des différentes méthodes dans le code XLiFE++.

Bibliographie:

- D. Givoli (1992), Numerical method for problems in infinite Domains, Elsevier Science Limited, Amsterdam.
- C. Goldstein (1982), A finite element method for solving scattering Helmholtz type equations in waveguides and other undbounded domains, Maths. of Comput., 39, 309-324.
- S. Kim (2019), Error analysis of PML-FEM approximations for the Helmholtz equation in waveguides. ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 53 (4), 1191-1222.
- V. Baronian , A.-S. Bonnet-BenDhia, S. Fliss, A. Tonnoir,(2016) Iterative methods for scattering problems in isotropic and anisotropic elastic waveguides, Wave Motion - vol. 64 (pp 13-33)

MS08 – Modèles mathématiques et leur discrétisation en électromagnétisme

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 27h TD: 3h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Patrick Ciarlet
Lieu des cours: ENSTA
Langue anglaise si demandé: oui
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Analyse fonctionnelle appliquée, formulations variationnelles, analyse numérique des EDP

Description:
On étudiera les ondes de nature électromagnétiques. Ces ondes sont modélisées par les champs électromagnétiques qui sont les solutions des équations de Maxwell. Ce cours visera quatre objectifs principaux : étude des propriétés des champs électromagnétiques ; définition de modèles associés aux équations de Maxwell (relation entre les champs, modèles statique ou à dépendance en temps connue, ...) ; résolution mathématique rigoureuse de ces modèles ; techniques de discrétisation et mise en œuvre numérique.

L'évaluation se fait par un contrôle continu (3 devoirs à la maison)

Contenu:
- Propriétés des champs électromagnétiques
- Espaces de Sobolev et théorèmes de trace en électromagnétisme
- Relations constitutives ; conditions aux limites ; définition des modèles
- Résolution des équations de Maxwell instationnaires et énergie
- Résolution des modèles statiques
- Résolution des équations de Maxwell stationnaires en domaine borné
- Discrétisation par éléments finis d'arête
- Analyse numérique et convergence
- Méthodes intégrales

Bibliographie:

- F. Assous, P. Ciarlet, S. Labrunie, *Mathematical Foundations of Computational Electromagnetism*, Springer, 2018.
- J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics, Third Edition*, John Wiley & Sons, 1999.
- P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford University Press, 2003.

MS09 – Modélisation des plasmas et des systèmes astrophysiques

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 24h TD: 6h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Intervenants: Guy Bonnaud, Stéphane Mathis, Jérôme Perez
Lieu des cours: ENSTA
Langue anglaise si demandé: non
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: Niveau L3 en physique

Description:
Le cours est décomposé en 4 séances consacrées aux plasmas et 5 séances consacrées à des systèmes astrophysiques. Les phénomènes de base sont passés en revue et constitueront le référent au cours avancé en modélisation et simulation numérique de plasma et d'astrophysique enseigné en seconde période.
Plasmas : ce cours introduit les processus physiques en œuvre dans les plasmas, milieu dominé par des comportements électromagnétiques induits : processus dominants, modèles pertinents sont passés en revue. La physique des plasmas est par essence la physique naturelle de tout l'univers extra-planétaire et celle de plasmas artificiels activement étudiés sur terre, depuis les décharges luminescentes jusqu'aux tokamaks pour la fusion thermonucléaire.
Astrophysique : ce cours introduit les notions de base permettant de décrire la formation, l'évolution et les propriétés générales des structures stellaires et des grandes structures cosmiques

Contenu:
- Pour la partie plasmas :
  - Ionisation
  - Trajectoires de charges en champs imposées et collisions
  - Rayonnement
  - Modèles cinétiques et hydrodynamiques
  - Modes électromagnétiques propres
- Pour la partie astrophysique :
  - Evolution stellaire
  - Le soleil et son environnement
  - Formation des grandes structures cosmiques
  - Etude des instabilités hydrodynamiques dans le contexte de l'astrophysique

Bibliographie:

- G. Bonnaud, *Notes de cours de physique des plasmas*
- J.M. Rax, *Physique des plasmas*, Dunod, 2005
- J. Perez, *Gravitation classique : Problème à N corps, de 2 à l'infini...*, Les presses de l'ENSTA, 2011
- B. W. Carroll, D. A. Ostlie, *An introduction to modern astrophysics*, Addison-Wesley, 1996

MS10 – Équations intégrales de frontière

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Eliane Bécache, Maryna Kachanovska
Lieu des cours: ENSTA
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Description:
Ce cours a pour objectif de présenter l'analyse et l'approximation des méthodes d'équations intégrales pour des problèmes harmoniques et transitoires.Ces méthodes connaissent un regain d'intérêt depuis quelques années grâce à de nouveaux algorithmes qui permettent de les rendre rapides et efficaces.

La première partie du cours sera consacrée à la présentation, à l'analyse et l'approximation des équations intégrales pour des problèmes elliptiques (Laplace, Helmholtz). Puis, la deuxième partie du cours abordera ces équations intégrales pour un problème hyperbolique modèle, l'équation des ondes. Ces équations intégrales en temps sont aussi appelées "potentiels retardés". L'analyse est assez différente du cas elliptique et repose sur la transformation de Laplace. En ce qui concerne l'approximation, nous présenterons une des méthodes les plus populaires, la méthode 'Convolution Quadrature', initialement proposée par Christian Lubich en 1988.

L'évaluation consistera en un partiel écrit de 2h (séance 6) sur la première partie du cours et un projet sur la deuxième partie du cours (analyse d'article + petit exposé).

Contenu:
— **1-** Introduction et motivation ; le problème aux limites pour l'équation de Laplace dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^3$ et la formule de représentation.
— **2-**Potentiels de simple et double couche, opérateurs intégraux de frontière et leurs expressions intégrales.
— **3-**Opérateur de Calderòn. Dérivation des formulations intégrales et leur caractère bien posé.
— **4-**Formulations intégrales pour l'équation de Helmholtz et caractère bien posé. Combined Field Integral Formulation.
— **5-**Discrétisation des équations intégrales de frontière par la méthode de Galerkin pour l'équation de Laplace, stabilité et convergence.
— **6-**Discrétisation des équations intégrales de frontière pour l'équation de Helmholtz. Partiel.
— **7-**Problème aux limites pour l'équation des ondes dans un domaine de $\mathbb{R}^d$; Solution fondamentale et formule de représentation à l'aide des potentiels retardés.
— **8-**Transformée de Laplace pour les distributions tempérées causales : définition, propriétés
— **9-** Application de l'analyse de Laplace pour les estimations des opérateurs intégraux et l'analyse de stabilité des équations intégrales
— **10-** Discrétisation des équations intégrales de frontière pour l'équation des ondes en temps : la méthode de "convolution quadrature", stabilité et convergence.

Bibliographie:

— Sauter, S., Schwab, Ch. *Boundary Element Methods*, Springer 2004
— Nédélec, J. -C. *Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems*, Springer 2001
— Lubich, Ch. *On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations*, Numerische Mathematik, 1994
— Sayas, F. *Retarded Potentials and Time Domain Boundary Integral Equations*, Springer, 2016

MS11 – Homogénéisation stochastique

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 12h TD: 6h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Laure Giovangigli
Lieu des cours: ENSTA
Master proposant le cours: AMS
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Analyse fonctionelle, Homogénéisation périodique

Description:
L'objectif de ce cours est de développer une théorie de l'homogénéisation stochastique et d'introduire les considérations quantitatives et numériques qui émergent dans ce contexte. Aucun prérequis en probabilités n'est attendu, seules des bases en analyse fonctionnelle et numérique pour les EDPs sont nécessaires. Nous commencerons par énoncer les résultats dans un cadre périodique avant de détailler le cadre aléatoire dans lequel nous allons travailler. Notre étude concerne les équations elliptiques linéaires aux coefficients stationnaires ergodiques dépendant d'une variable qui oscille rapidement comparée à la variable d'espace dans laquelle sont posées les équations. Nous montrerons la convergence presque sûre de la solution vers la solution d'une équation homogénéisée déterministe qui ne dépend plus que de la variable macroscopique. Nous aborderons ensuite les problématiques de quantification de cette convergence en montrant sur une équation elliptique perturbée un résultat de type central limite pour notre erreur. Nous présenterons enfin d'autres cadres aléatoires relevant de l'homogénéisation et les résultats associés, comme la perturbation d'un milieu périodique ou sa transformation par un difféomorphisme aléatoire de gradient stationnaire. Deux séances de travaux dirigés d'une heure et demi chacune auront lieu au cours du trimestre. Une séance de 3h de travaux pratiques en salle informatique nous permettra d'étudier la mise en oeuvre numérique de l'homogénéisation stochastique et d'appliquer des méthodes de réduction de variance pour améliorer nos algorithmes. L'évaluation consistera en un examen de 3h qui se tiendra à la fin du cours.

Contenu:
- Homogénéisation périodique, quelques rappels de résultats
- Homogénéisation stochastique des EDP elliptiques linéaires
- Estimations quantitatives des convergence
- Aspects numériques
- Extension à d'autres cadres aléatoires

Bibliographie:

- G.C. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan, Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients, *Random fields*, Vol. I, II (Esztergom, 1979), *Colloq. Math. Soc. Jànos Bolyai*, **27** (1981) 835–873, North-Holland, Amsterdam.
- G. Bal, Central limits and homogenization in random media, *Multiscale model & Simul*, **7** (2008) 677–702.
- X. Blanc, C. Le Bris, and P.-L. Lions, Stochastic homogenization and random lattices, *J. Math. Pures Appl.*, **88** (2007), 34–63.
- Anantharaman, Arnaud, Ronan Costaouec, C. Le Bris, Frédéric Legoll, and Florian Thomines. Introduction to numerical stochastic homogenization and the related computational challenges : some recent developments. In *Multiscale modeling and analysis for materials simulation*, pp. 197-272. 2012..

MS12 – Méthodes hybrides pour la diffraction à hautes fréquences

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 12h TD: 6h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Daniel Bouche, Eric Lunéville
Lieu des cours: ENSTA
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: Connaissances élémentaires de l'équation des ondes, résolution des problèmes de diffraction par équations intégrales

Description:
Les ondes, sonores et électromagnétiques, nous permettent de percevoir le monde extérieur, par les interactions, appelées diffractions qu'elles ont avec les objets. Ces phénomènes de diffraction sont omniprésents : vision, imagerie radar, acoustique des salles de concert, réduction du bruit urbain, etc., et souvent globalement en régime haute fréquence : la longueur d'onde est petite devant la taille de l'objet. Néanmoins certains détails, de dimension petite devant la longueur d'onde, peuvent avoir des effets diffractifs non négligeables. Pour simuler numériquement les phénomènes de diffraction, les méthodes intégrales [1] et asymptotiques haute fréquence [2] sont naturellement complémentaires. Les premières permettent de calculer le champ diffracté par des objets de forme très générale, mais de taille raisonnable en termes de longueur d'onde. Les secondes, fondées sur des développements asymptotiques, sont d'autant plus précises que la fréquence est élevée et permettent d'élucider la structure du champ diffracté en termes physiques. L'idée naturelle consiste à associer les deux types de méthodes pour profiter de leurs avantages respectifs. Le cours présente les fondements mathématiques des méthodes haute fréquence et comment les mettre en œuvre, en les hybridant avec des méthodes d'équations intégrales [3], pour calculer le champ diffracté par des objets en même temps très grands en terme de longueur d'onde, mais comportant des détails géométriques fins et de forme complexe

Bibliographie:

1 M. Lenoir, *Notes de cours sur les équations intégrales et problèmes de diffraction*, ENSTA.
2 I. Andronov, D. Bouche, F. Molinet *Asymptotic and Hybrid Methods in Electromagnetism* IEE Press, 2005
3 M. Lenoir, E. Lunéville, N. Salles, *Coupling High-frequency Methods and Boundary Element techniques for Scattering Problems with several Obstacles*, WAVES 2017

MS13 – Méthode de base réduite pour la résolution d'EDPs dépendantes de paramètres.

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 12h TD: 6h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Langue anglaise si demandé: oui
Intervenants: Philip Edel
Lieu des cours: ENSTA
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: Analyse mathématique et numérique des EDPs, Méthode des éléments finis

Description:
Les équations aux dérivées partielles (EDPs) sont largement utilisées dans la recherche et l'industrie pour modéliser et simuler des phénomènes physiques. Ces EDPs dépendent de paramètres, qui servent par exemple à décrire des propriétés matérielles ou des caractéristiques géométriques. En pratique, il est souvent nécessaire de résoudre numériquement l'EDP non pas pour un seul jeu de valeurs de paramètres fixé, mais pour un ensemble potentiellement vaste de valeurs de paramètres. C'est notamment le cas dans des contextes d'optimisation, de quantification d'incertitude ou d'inférence de paramètres. En une dizaine d'années, la méthode de base réduite est devenu un outil essentiel pour résoudre efficacement et de façon fiable les EDPs dépendantes de paramètres. L'objectif de ce cours est d'introduire cette méthode, de se familiariser avec les concepts sous- jacents et de la mettre en oeuvre, lors de TP sur ordinateur avec MatLab, dans des cas concrets d'EDPs dépendantes de paramètres, en utilisant la méthode des éléments finis ou des volumes finis.

Contenu:
- Rappels sur la discrétisation des EDPs,
- Introduction aux notions d'épaisseur de Kolmogorov, d'opérateur affine et d'efficacité offline/online,
- Résultat d'estimation d'erreur a posteriori,
- Deux algorithmes de construction de base réduite : POD et greedy,
- Mise en œuvre de la méthode de base réduite en MatLab lors de TP.

Bibliographie:

- J.S. Hesthaven, G. Rozza, B. Stamm et al. Certified reduced basis methods for parametrized partial differential equations. Berlin : Springer, 2016.
- A. Quarteroni, A. Manzoni and F. Negri. Reduced basis methods for partial differ- ential equations : an introduction. Springer, 2015.

MS14 – Génération et adaptation de maillage pour le calcul scientifique

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 12h TD: 6h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Frédéric Alauzet
Lieu des cours: ENSTA
Langue anglaise si demandé: non
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: Méthodes numériques, algorithmique, langage C

Description:
Une branche importante du calcul scientifique consiste à simuler sur ordinateurs des phénomènes physiques complexes. Son intérêt consiste à mieux appréhender des problèmes fondamentaux : solution des équations de Navier-Stokes, turbulence, ou à prédire des phénomènes non observables par l'expérience comme les écoulements biologiques ou la prédiction des séismes. Le recours à la simulation numérique est également croissante dans des phases de design où l'objet n'existe pas encore (avion, voiture, pièces mécaniques, ...) afin de trouver, par exemple, une forme optimale. Dans ce contexte, la génération d'un maillage, support spatial discret pour le calcul, est une phase clé du processus de simulation : pas de maillage, pas de solution, pas d'analyse. Dans une première partie, ce cours d'intéresse aux méthodes de génération de maillages pour des géométries complexes. Dans une deuxième partie, on s'intéresse aux techniques d'adaptation de maillages pour des solutions numériques. Ces dernières se basent sur des estimateurs d'erreur qui permettent à la fois de contrôler le degré de précision d'une solution ainsi que son degré de fiabilité.
On donne ci-dessous un découpage du cours pour 6 séances. Chaque séance se décompose en un cours magistral d'1h suivi de 2h de TD/TP sur ordinateur. L'évaluation se fait sur le compte-rendu de deux rapports de projet.

Contenu:
- Sur la génération de maillage en 2D : algorithmes (complexité, table de hachage), Noyau de Delaunay, opérateurs de modifications de maillages, preuve d'existence,
- Génération de maillage de surface à partir d'une représentation continue (Bézier, NURBS). Notions de géométrie différentielle pour la génération de maillages (courbure, approximation surfacique),
- Génération de maillage en 3D : Preuve d'existence, visibilité (problème d'optimisation convexe).
- Partitionnement de maillage
- Projet : Réalisation d'un mailleur 2D basé sur le noyau de Delaunay.
- Dualité entre les espaces métriques Riemanniens et les maillages adaptatifs anisotropes
- Introduction aux estimateurs d'erreurs *a priori* et *a posteriori* pour des solutions numériques d'EDPs.
- Estimateurs d'erreur anisotropes : multi-échelles ou adjoint pour le contrôle d'une fonctionnelle.
- Projet : Implémentation d'un estimateur d'erreur d'interpolation en norme $\mathbf{L}^p$ et réalisation d'une boucle d'adaptation sur un écoulement de mécanique des fluides (sortie de réacteur, entrée atmosphérique d'une capsule APOLLO)

Bibliographie:

- P. L. George, H. Borouchaki, F. Alauzet, A. Loseille and L. Maréchal, *Maillage, modélisation géométrique et simulation numérique, Volume 2 : Métriques, maillages et adaptation de maillages*, ISTE Editions, 2018.
- R. Löhner, *Applied Computational Fluid Dynamics Techniques : An Introduction Based on Finite Element Methods*, Second Edition, John Wiley & Sons, 2008.

MSE2 – Introduction à l'imagerie médicale

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 15h TD: 12h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Laure Giovangigli, Pierre Millien
Lieu des cours: ENSTA
Master proposant le cours: Master MSV
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Analyse fonctionelle et numérique des EDPs, bases en probabilités

Description:
L'objectif de ce cours est de présenter des problèmes mathématiques récents apparaissant de façon transverse dans l'étude de techniques d'imagerie médicales reposant sur la physique des ondes. Nous commencerons par considérer différents régimes asymptotiques des équations d'ondes pour y mettre en évidence des paramètres physiologiques que l'on souhaite imager. Le problème de la diffusion d'une onde par un objet sera abordé via l'étude des équations intégrales associées. Nous introduirons ensuite des fonctionnelles de reconstruction d'images basées sur le principe de retropropagation. Une étude quantitative des performances (stabilité vis à vis de différents bruits, résolution...) de ces fonctionnelles sera menée. Nous aborderons dans les deux dernières séances de cours comment il est possible de contourner les limites fondamentales de ces méthodes en utilisant de la physique multi-onde. Mathématiquement, ces méthodes d'imageries dites *hybrides* reposent sur la résolution d'une nouvelle classe de problèmes inverses basés sur des systèmes d'équations couplées. La deuxième moitié du cours sera consacrée à l'implémentation pratique de problèmes inverses liés aux méthodes d'imagerie sous forme de projets en binôme. L'évaluation consistera en une soutenance orale de ces projets.

Contenu:
- Propagation des ondes dans les tissus biologiques : présentation des équations et régimes asymptotiques associés [3h]
- Diffusion par des obstacles, formule de Kirchoff pour la rétropropagation, critère de Rayleigh et stabilité [6h]
- Physique multi-ondes :
  - corrélations de phases et Doppler : imager les mouvements [3h]
  - effet thermoacoustique et applications à la photoacoustique [3h]
- Projets [12h]
- Soutenance de projets [3h]

Bibliographie:

- H. Ammari, J. Garnier, H. Kang, L. H. Nguyen and L. Seppecher, Multi-Wave Medical Imaging : Mathematical Modelling and Imaging Reconstruction, *World Scientific*, London (2017).
- J. Garnier, Inverse problems and Imaging (2021).

MSE3 – Modélisation mathématique et estimation en biomécanique cardiaque – De la théorie aux applications médicales

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 18h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Langue anglaise si demandé: oui
Intervenants: Philippe Moireau ; Dominique Chapelle
Lieu des cours: ENSTA
Master proposant le cours: Master MSV
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Méthodes variationelles pour les EDP, bases d'optimisation et/ou de programmation dynamique

Description:
Ce cours a pour vocation de décrire une démarche de modélisation mathématique allant de la formulation d'un modèle physiologique d'organe jusqu'à son interaction avec des données recueillies à l'hôpital. Le contexte est celui de la modélisation du coeur en interaction avec le système cardiovasculaire afin de proposer un outil de monitorage en anesthésie. Nous proposons de parcourir les différentes étapes de modélisations en confrontant les besoins de l'application et les outils mathématiques assurant des solutions aux problèmes (formulation, caractère bien posé, méthodes numériques, problèmes inverses en interaction avec les données). Ce cours pourra être complété par des extensions théoriques sur chaque sujet introduit sous forme de conférences ou d'articles à étudier.

Contenu:
- Introduction aux formulations variationnelles en elastodynamique linéaire et non-linéaire - 3h
  - Cadre variationnel et fonctionnel pour la mécanique linéaire
  - Introduction à la mécanique non-linéaire
- De la physiologie à la modélisation du système cardiovasculaire - 3h
  - Modélisation des muscles cardiaques
  - Le coeur dans le système cardiovasculaire
- Modèles micro de la contraction cardiaque - 3h
  - Modèles de type Huxley
  - Moments
  - Vers les modèles stochastiques
- Réduction de modèle - 3h
  - Hypothèse de surfaces minces
  - Modèles réduits
  - Des estimations à l'existence de solutions
- Principes de discrétisation en temps 3h
  - Discrétisation en mécanique
  - Discrétisation des modèles réduits
  - Discrétisation pour les systèmes couplés
- Estimation 3h
  - Cadre de l'estimation pour les ODEs
  - Equivalences en linéaire
  - Extensions en non-linéaire

OD1A – Contrôle optimal des EDO

Etablissement(s) gérant le cours: ENSTA
Volume horaire total et par séance: CM: 20h TD: 10h séance: 2-3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Intervenants: Frédéric Bonnans et Laurent Pfeiffer
Lieu des cours: ENSTA
Master proposant le cours: AMS, mutualisation OPTI
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM

Pré-requis: Calcul différentiel, analyse fonctionnelle, un peu d'analyse numérique

Description:
Les technologies actuelles cherchent de plus en plus à traiter des systèmes complexes, constitués par un grand nombre de paramètres liés les uns aux autres par une structure bien déterminée. Un autre aspect de l'évolution générale est aussi la recherche de performances évoluées (notion de productivité, de coût, de qualité des produits, ...) et des performances optimales (aller sur la lune en consommant le minimum de carburant, planifier une économie de façon optimale, etc). L'objectif de ce cours est de présenter les méthodes théoriques et numériques de la commande optimale permettant de résoudre certains systèmes complexes.

Le cours magistral est accompagné de quelques séances de travaux dirigés et de travaux pratiques, durant lesquelles les étudiants mettent en oeuvre sur un cas concret quelques méthodes numériques étudiées.

Le cours sera donné en anglais.

Contenu:
- Introduction : examples, differential calculus in functional spaces.
- Pontryagin's principle (PMP).
- Applications of the PMP.
- Minimal time function, optimal synthesis (linear case).
- Shooting methods.
- Minimal time function, optimal synthesis (nonlinear case).
- State constraints (PMP). Beginning of the Master part of the course.
- Practical class (gradient methods for optimal control problems) - End of the ENSTA part of the course.
- State constraints and shooting.
- HJB approach for optimal control. Value function, dynamic programming principle.
- Singular arcs.
- HJB equations, verification theorem, viscosity solutions, numerical analysis.
- Written exam.

OD32 – Contrôle géométrique

Etablissement(s) gérant le cours: Paris Sud
Volume horaire total et par séance: CM: 18h TD: 0h séance: 0h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: D. Prandi
Lieu des cours: ENSTA
Master proposant le cours: OPTI
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM

Description:
Ce cours présente plusieurs approches mathématiques et numériques pour planifier des trajectoires de systèmes commandés non-linéaires.

Contenu:
- Introduction, Point de vue robotique (survey)
  Formalisation, classification des problèmes
- Le cas linéaire : planification directe (grammien), via Brunovsky
- Equivalence de systèmes : (1) équivalence par feedback : définition, critères de linéarisation (locale et globale) (2) équivalence dynamique, platitude
- Propriétés des ensembles atteignables, rappels de commandabilité
- Commande optimal, PMP, LQ
- Calcul des ensembles atteignables, approche "level-set". FIN DU PROGRAMME COURS ENSTA
- Approche HJB. Simulations numériques FIN DU PROGRAMME COURS ENSTA
- DERNIÈRE SEANCE POUR MASTER ATSI :
  Le cas non-holonome : méthodes basées sur structure d'algèbre de Lie, commandes dans des familles paramétrées (polynômes, sinusoïdes), ex. des systèmes chaînés, processus par itération, méthode de continuation

Bibliographie:

- A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Springer-Verlag, 2004.
- V. Jurdjevic. Geometric Control Theory. Cambridge University Press, 1997.
- F. Jean. Control of Nonholonomic Systems : from Sub-Riemannian Geo-metry to Motion Planning. Springer International Publishing, Springer- Briefs in Mathematics, 2014.

V03 – Analyse théorique et numérique des systèmes hyperboliques

Etablissement(s) gérant le cours: Université Paris-Sud et UVSQ
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Christophe Chalons
Lieu des cours: Orsay
Langue anglaise si demandé: oui
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Connaissances de mathématiques générales et d'équations aux dérivées partielles

Description:
Ce cours est consacré à l'analyse théorique et à l'approximation numérique par la méthode des volumes finis des solutions des systèmes hyperboliques linéaires et non linéaires.

Contenu:
- Hyperbolicité des systèmes linéaires et non linéaires, motivation et exemples
- Analyse des équations scalaires non linéaires, entropies, théorème de Krushkov
- Analyse numérique des équations scalaires : schémas monotones
- Ondes simples pour les systèmes : ondes de détente et invariants de Riemann, ondes de choc et ensemble de Rankine-Hugoniot, discontinuités de contact
- Théoréme de Lax, résolution du problème de Riemann pour les systèmes non linéaires et application au système de la dynamique des gaz
- Méthode des volumes finis, schéma de Godunov
- Formalisme de Harten, Lax et van Leer, schémas de Godunov associés
- Méthodes de relaxation
- Aspects multidimensionnels, prise en compte des termes source et des conditions aux limites

Bibliographie:

- E. Godlewski, P.A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer, New York (1996).
- E. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer, Berlin (1999).
- R. LeVeque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge University Press (2002).
- B. Després, F. Dubois, *Systèmes hyperboliques de lois de conservation. Application à la dynamique des gaz*, Editions de l'Ecole Polytechnique (2005).
- C. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, Berlin (2005).

V04 – Optimisation sans gradient

Etablissement(s) gérant le cours: UVSQ
Volume horaire total et par séance: CM: 15h TD: 15h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Anne Auger
Lieu des cours: ENSTA
Master proposant le cours: AMS, mutualisation OPTI
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Fonctions de plusieurs variables, probabilités (cours niveau L3 ou M1)

Description:

Les problèmes d'optimisation numérique se rencontrent dans de nombreux domaines de l'ingénierie où les fonctions à optimiser peuvent être de différents types : boîte noire ou explicite, à variables continues ou discrètes, coûteuses à évaluer ou non, etc.. Souvent, le gradient de ces fonctions est difficile à calculer ou n'existe pas car la fonction est non-differentiable et le problème peut présenter de nombreuses difficultés à savoir être non-convexe, non-séparable, discontinu, bruité, mal-conditionné, avoir de nombreux optima locaux.

Dans ce contexte, ce cours présente les principales méthodes d'optimisation sans gradient déterministes et stochastiques. Nous détaillons les notions théoriques derrière les méthodes mais également les aspects plus numériques avec l'objectif qu'à la fin du cours les élèves soient capables de mettre en place un algorithme d'optimisation sans gradient sur un problème réel.

Vous aurez l'opportunité d'implémenter ou d'utiliser l'implémentation de certains algorithmes. Vous apprendrez notamment à déjouer les pièges typiques en optimisation numérique (ne pas conclure hâtivement que la méthode est bloquée dans un optimum local, repérer les problèmes de précision numériques, ...). Nous expliquerons comment évaluer et comparer les performances des algorithmes.

Enfin, nous abordons l'optimisation multiobjectif, i.e. lorsque l'on souhaite optimiser plusieurs fonctions simultanément (comme minimiser le coût de production d'un produit tout en maximisant sa robustesse). Ces types de problèmes étant très courants dans les applications.

Contenu:

- Qu'est ce qui rend un problème d'optimisation difficile ? (non-convexité, discontinuité, non-separabilité, mauvais conditionnement, malédiction de la dimension)
- Méthodes adaptatives stochastiques (CMA-ES)
- Méthodes déterministes à base de région de confiance (NEWUOA), méthodes de quasi-Newton
- Méthodes pour l'optimisation multiobjectif sans gradient
- Evaluation des performances (benchmarking)

Bibliographie:

- Introduction to Derivative Free Optimization, A. Conn, K. Scheinberg et L. Vincente SIAM, 2009.
- Optimisation continue : cours et exercices, J.F. Bonnans, Dunod, 2006.
- Numercial optimization, theoretical and practical aspects : JF Bonnans, JC Gilbert, C. Lemaréchal, C. Sagastizbal, Springer Verlag 2003.

V06 – Analyse théorique et numérique des systèmes non-strictement hyperboliques

Etablissement(s) gérant le cours: UVSQ
Volume horaire total et par séance: CM: 9h TD: 9h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Quang-Huy Tran
Lieu des cours: Univ. Orsay
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Connaissances de mathématiques générales et d'équations aux dérivées partielles

Description:
Ce cours est consacré à l'analyse théorique et à l'approximation numériques des solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles linaires et non linaires pouvant présenter des instabilités dues àune perte locale de l'hyperbolicité stricte.

Contenu:
- Systèmes non-strictement hyperboliques : phénomène de résonance, apparition de delta-choc
- Exemples applicatifs sous forme conservative : modèles d'Isaacson-Temple, de Keyfitz-Kranzer, de gaz sans pression
- Exemples applicatifs sous forme quasi-linéaire : modèles de Saint-Venant, de tuyère section variable, d'écoulement diphasique de Baer-Nunziato
- Schémas numériques adapts

Bibliographie:

- F. Bouchut, *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*, vol. **142** of Frontiers in Mathematics series, Birkhäuser, Basel, 2004.
- R. Courant, K. O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, vol. **21** of Applied Mathematical Sciences series, Springer, New York, 1999.
- E. F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*, Springer, Berlin 2014.

V07 – Modélisation, analyse et discrétisation d'un problème d'interaction fluide-structure

Etablissement(s) gérant le cours: UVSQ
Volume horaire total et par séance: CM: 18h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Muriel Boulakia (UVSQ)
Lieu des cours: Orsay
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Il est nécessaire d'avoir des connaissances en analyse variationnelle des EDP et en analyse numérique (des connaissances sur les Eléments Finis seront les bienvenues)

Description:
Ce cours est consacré aux problèmes d'interaction fluide-structure qui permettent de modéliser tous les phénomènes où les mouvements d'un fluide et d'une structure sont en interaction. Nous nous concentrerons ici sur la présentation et l'étude de modèles permettant de décrire des écoulements sanguins.

Contenu:
- Modélisation : présentation de plusieurs modèles (modèle complet tridimensionnel et modèle réduit en dimension 1)
- Etude des équations de Stokes (formulations variationnelles contrainte et mixte, théorème de Nečas, approximation numérique des équations de Stokes par la méthode des éléments finis), étude du problème couplé stationnaire entre un fluide modélisé par Stokes et une structure élastique
- Approximation numérique de problèmes d'interaction fluide-structure : algorithmes de couplage ; spécificités des écoulements sanguins.

V08 – Equation de Klein-Gordon nonlinéaire amortie

Etablissement(s) gérant le cours: UVSQ
Volume horaire total et par séance: CM: 18h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Yvan MARTEL (UVSQ)
Lieu des cours: Univ. Orsay
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Connaissances de mathématiques générales. Équations différentielles linéaires et non linéaires. Bases de l'analyse fonctionnelle. Équations aux dérivées partielles linéaires.

Description:
Ce cours est consacré à l'étude de l'émergence de solitons (ondes progressives) dans le comportement global de toutes les solutions globales de l'équation de Klein-Gordon non linéaire avec un amortissement, en dimension 1 d'espace.

Contenu:
- Le problème de Cauchy local en temps pour l'équation de Klein-Gordon non linéaire avec amortissement (T. Cazenave et A. Haraux).
- Toute solution globale est bornée par la méthode d'énergie (T. Cazenave).
- Les solitons de l'équation de Klein-Gordon non linéaire (incluant l'étude spectrale de l'opérateur linéarisé).
- Le principe de concentration-compacité (P.-L. Lions)
- Premier résultat de convergence ; émergence de solitons pour des sous-suites de temps (E. Feireisl).
- "Modulation" des solitons et équations des paramètres géométriques (position et vitesse de chaque soliton)
- Étude d'un système de dimension fini de type Toda (F. Merle et H. Zaag).
- Raffinement du résultat de compacité, convergence pour toute suite de temps, propriété des signes alternés, positions asymptotiques des solitons (R. Côte, Y. Martel et X. Yuan)

Bibliographie:

- T. Cazenave, Uniform estimates for solutions of nonlinear Klein-Gordon equations, *Journal of Functional Analysis*, 60 (1985), 36-55.
- T. Cazenave and A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equations.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 13. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- R. Côte, Y. Martel, X. Yuan, Long-time asymptotics of the one-dimensional damped nonlinear Klein-Gordon equation, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 239, 1837–1874 (2021). `https://arxiv.org/abs/2002.01826`
- E. Feireisl, Finite energy travelling waves for nonlinear damped wave equations, *Quart. Appl. Math.*, 56 (1998), 55–70.
- P.-L. Lions, On positive solutions of semilinear elliptic equations in unbounded domains, Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, II (Berkeley, CA, 1986), 85–122, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 13, Springer, New York, 1988.
- F. Merle and H. Zaag, Existence and classification of characteristic points at blow-up for a semilinear wave equation in one space dimension, *Amer. J. Math.*, 134 (2012) n. 3, 581–648.

O1 – Introduction à la Théorie spectrale

Etablissement(s) gérant le cours: Paris-Sud
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h30 puis 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Intervenants: Stéphane Nonnenmacher
Master proposant le cours: AMS, mutualisation AAG
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM
Lieu des cours: Orsay

Pré-requis: Bases d'analyse fonctionnelle

Description:
Le but de ce cours est de présenter les outils principaux de l'analyse spectrale des opérateurs autoadjoints non-bornés avec applications aux opérateurs différentiels. On introduira un calcul fonctionnel de tels opérateurs et une classification de leurs spectres, et on présentera des techniques permettant d'étudier les propriétés spectrales des opérateurs différentiels en fonctions de leurs coefficients : analyse des opérateurs compacts, principe variationnel, notions de la théorie des perturbations. Ensuite on appliquera ces techniques à l'étude des valeurs propres associées à certains problèmes aux limites.

The objective of this course is to present the main tools of the spectral analysis of unbounded self-adjoint operators with applications to differential operators. We will introduce a functional calculus of such operators and a classification of their spectra, and then we will present some techniques allowing one to understand spectral properties of differential operators in terms of their coefficients : analysis of compact operators, variational principle, notions of the perturbation theory. This machinery will be then applied to the study of eigenvalues associated with some boundary value problems.

O2 – Introduction à l'analyse semiclassique

Etablissement(s) gérant le cours: Paris-Saclay
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h30 puis 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Intervenants: Matthieu Léautaud
Lieu des cours: Orsay
Master proposant le cours: AMS, mutualisation AAG
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM

Pré-requis: Bases d'analyse fonctionnelle, théorie des distributions, transformée de Fourier

Description:
Ce cours présente la quantification semiclassique sur l'espace euclidien, qui débouche sur la construction d'une classe d'opérateurs linéaires différentiels ou pseudo-différentiels, dépendant d'un petit paramètre (le paramètre de Planck $0 < h \ll 1$). L'idée centrale est de faire correspondre à chaque opérateur son "symbole" (une fonction sur l'"espace des phases"), et de se servir de ce symbole pour analyser l'opérateur. On étudiera les propriétés de composition de cette famille d'opérateurs, ainsi que l'action induite par l'équation de Schrödinger. On en déduira quelques propriétés spectrales (distribution des valeurs propres, localisation des fonctions propres), toujours dans le régime asymptotique $h \ll 1$ (limite semiclassique). Ce formalisme est apparu initialement en mécanique quantique, il constitue un aspect de l'*analyse microlocale* utilisée pour analyser plusieurs types d'EDP dans le régime de haute fréquence.

These lectures present the semiclassical quantization on the Euclidean space. Its main objective is the contruction and study of a class of differential (or pseudodifferential) linear operators, which depend on a small parameter $0 < h \ll 1$ (called "Planck's parameter"). The main idea is to let correspond an operator to its "symbol", a function on "phase space", and use this symbol to analyze the properties of the operator. We will study the composition of two such operators, the action induced onto them by the Schrödinger equation. We will also deduce certain spectral properties of these operators (distribution of the eigenvalues, localization of the eigenfunctions), always in the asymptotic regime $h \ll 1$ (semiclassical limit). This formalism initially appeared in quantum mechanics, but it is also part of the *microlocal analysis* of PDEs.

O3 – Equations elliptiques linéaires et non-linéaires

Etablissement(s) gérant le cours: Paris-Sud
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h30 puis 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Intervenants: Frédéric Rousset
Master proposant le cours: AMS, mutualisation AAG
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM
Lieu des cours: Orsay

Pré-requis: Bases d'analyse fonctionnelle

Description:
Le cours abordera les sujets suivants :
-Régularité pour les équations elliptiques linéaires : régularité L^p, régularité holdérienne, régularité pour les équations à coefficients L^∞.
-Point fixe de Schauder, applications aux équations elliptiques semi-linéaires. Lien avec le calcul des variations.
-Eléments de théorie des bifurcations
-Méthodes de monotonie, applications aux p-Laplacien.
-Introduction aux solutions de viscosité

The course will deal with the following topics :
-Regularity theory for linear elliptic equations : L^p regularity, Holder regularity, regularity for equations with L^∞ coefficients
-Schauder fixed point theorem, applications to semi linear elliptic equations. Link with the calculus of variations.
-Elements of bifurcation theory.
-Monotony methods, application to p-Laplace equations
-Introduction to viscosity solutions.

O4 – Equations dispersives

Etablissement(s) gérant le cours: Paris-Sud
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h30 puis 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Frédéric Rousset
Lieu des cours: Orsay
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM

Pré-requis: Bases d'analyse fonctionnelle, de distributions et d'analyse de Fourier

Description:
L'objectif de ce cours est d'introduire les étudiants aux Equations aux Dérivées Partielles Dispersives linéaires ou non-linéaires, et d'exhiber quelques comportements typiques des solutions : existence locale ou globale, dispersion, diffusion ou explosion. L'essentiel du cours sera consacré à un modèle simple, l'équation de Schrödinger.

Plan :

1) Rappels et compléments d'analyse harmonique
2) Etude des équations linéaires : existence, description en Fourier, estimations de Strichartz
3) Equations non linéaires *via* l'injection de Sobolev
4) Equations non linéaires *via* les estimations de Strichartz
5) Existence globale : utilisation des lois de conservation
6) Théorie de la diffusion pour l'équation de Schrödinger non linéaire défocalisante
7) Existence d'ondes solitaires, stabilité, instabilité, blow-up pour l'équation de Schrödinger non linéaire focalisante

The aim of the course is to give an introduction to the study of linear and nonlinear dispersive equations and to exhibit some of the typical behaviors of the solutions : local and global existence, dispersion, scattering or blow-up. Most of the material will be devoted to the simple model of the Schrödinger equation.

Plan :

1) Some useful results of harmonic analysis
2) Linear equations : existence, solutions in Fourier, Strichartz estimates
3) Nonlinear equations *via* Sobolev embedding
4) Nonlinear equations *via* Strichartz estimates
5) Global existence using conservation laws
6) Scattering for defocusing nonlinear Schrodinger equations
7)Existence of solitary waves, stability, instability, blow-up for the focusing NLS

O5 – Méthodes mathématiques pour la mécanique quantique

Etablissement(s) gérant le cours: Paris-Sud
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h30 puis 3hh
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 1
Intervenants: Antoine Levitt
Lieu des cours: Orsay
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Cours de pré-rentrée en analyse fonctionnelle et analyse numérique.

Description:
La théorie quantique est un des accomplissements les plus remarquables de l'histoire des sciences, avec des applications allant de la physique la plus fondamentale (matière, rayonnement...) à la plus appliquée (électronique, calcul quantique...). D'un point de vue mathématique, c'est une théorie fascinante : elle est un terrain de jeux parfait pour l'application de théories mathématiques diverses, et a stimulé en retour le développement de nombreux domaines des mathématiques.

L'objectif de ce cours est de présenter les bases mathématiques de la théorie quantique, ainsi que quelques méthodes asymptotiques et numériques permettant la résolution approchée de ses équations. Il comporte des aspects de modélisation (application de la mécanique quantique à la structure de la matière), d'analyse mathématique (structure des équations et développements asymptotiques), et d'analyse numérique (convergence de schémas). Il sera complété par des TP (en Python) où les étudiants construiront un simulateur de systèmes quantiques 1D et l'utiliseront pour aborder des phénomènes physiques réalistes (liaison chimique, spectres d'absorption) sur un modèle simple.

Il n'est pas nécessaire d'avoir suivi un cours de mécanique quantique pour suivre ce cours. Les notions pertinentes de théorie spectrale seront données mais admises (elles font l'objet d'un cours séparé du master, qu'il est utile mais pas nécessaire de suivre pour suivre celui-ci).

Contenu:
- Postulats de la mécanique quantique et exemples.
- Simulation numérique de systèmes quantiques. Application à la liaison chimique.
- Méthodes de perturbation indépendante et dépendante du temps. Application à l'interaction rayonnement-matière.
- Mécanique quantique à N corps : approximations et applications.

O6 Calcul des variations et applications

Etablissement(s) gérant le cours: Paris Sud
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Luca Nenna
Master proposant le cours: AMS, mutualisation avec le M2 Optimisation
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM
Lieu des cours: Orsay

Pré-requis: Integration theory, functional analysis, weak convergence, Sobolev spaces

Description:
Objectives : The calculus of variations is the study of the minimizers or critical points of "functionals", which are functions defined in spaces of infinite dimensions, typically functional spaces. Why is it interesting ? (1) it provides sometimes a very simple tool for showing existence of (weak) solutions to a problem ; (2) many PDEs come from problems in physics, mechanics, etc, and precisely from "variational" principles and are therefore (often minimizing) critical points of some physical energy. (3) many problems in the industry (or finance, etc) are designed as finding the "best" state according to some criterion, and their solution is precisely a minimizer, or maximizer, of this criterion ("optimization"). In particular we will focus on the following items.

Contenu:
- Characterization of the critical points
- Existence of minimizers
- Regularity for minimizers (elliptic case)
- The variational convergence aka the $\Gamma-$convergence
- Some links between large deviation principles and $\Gamma-$convergence
- Applications to some problems arising in Quantum Mechanics and Machine learning.

Bibliographie:

- Dacorogna : Direct methods in the calculus of variations
- Santambrogio : A Course in the Calculus of Variations

O7 – Introduction à la méthode de Boltzmann sur réseau

Etablissement(s) gérant le cours: Orsay
Volume horaire total et par séance: CM: 18h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Benjamin Graille
Master proposant le cours:
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM/MS
Lieu des cours: Orsay

Description:
La méthode de Boltzmann sur réseau est une méthode numérique qui permet d'approcher les solutions d'équations aux dérivées partielles. Elle est considérée comme extrêmement efficace pour plusieurs raisons : l'algorithme est très simple à programmer ; la méthode est explicite et ne nécessite aucune résolution de systèmes linéaires ; les opérations sont pour la plupart locales en mémoire ce qui permet une accélération efficace en parallélisant le code. Ses multiples avantages font sa popularité et ses champs d'applications s'étendent actuellement des équations de la mécanique des fluides (Navier-Stokes mais aussi physique des plasmas) à la mécanique des solides, aux milieux poreux... Cependant les résultats mathématiques permettant de garantir la qualité de la solution numérique calculée sont peu nombreux et nécessitent le développement de nouveaux outils. C'est un domaine de recherche en mathématique qui est actuellement en pleine expansion.

La méthode de Boltzmann sur réseau consiste, dans sa version la plus pure, à faire évoluer sur un maillage cartésien des fonctions *densités de particules* selon un algorithme imitant une version discrète de l'équation de Boltzmann décrivant l'état statistique d'un gaz hors de l'équilibre thermodynamique. L'objectif de ce cours est avant tout de présenter les différentes étapes de l'algorithme afin de comprendre son comportement et ses qualités. Nous introduirons ensuite les différents outils mathématiques nécessaires à l'étude en particulier de la consistance, de la stabilité et de la convergence de ces schémas. Nous étudierons certains schémas les plus simples et les plus populaires permettant de simuler des systèmes hyperboliques comme les équations de transport, de Bürgers, de Saint-Venant ou d'Euler mais aussi des équations paraboliques comme l'équation de la chaleur.

Nous nous appuierons sur un logiciel libre `pylbm`[1] afin de tester rapidement et simplement la méthode. Des séances de travaux pratiques sur machine seront en particulier dédiées à l'utilisation de la méthode pour améliorer la compréhension de ses propriétés.

1. `https://pylbm.readthedocs.io/en/latest/`

O8 – Transport Optimal

Etablissement(s) gérant le cours: Paris-Saclay
Volume horaire total et par séance: CM: 18h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Thomas Gallouët
Master proposant le cours: OPT, mutualisation AMS
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM
Lieu des cours: Orsay

Pré-requis: Notions on measure theory, weak convergence, and convex analysis

Description:
Optimal transport is a powerful mathematical theory at the interface between optimization and probability theory with far reaching applications. It defines a natural tool to study probability distributions in the many situations where they appear : data science, partial differential equations, statistics or shape processing. In this course we will present the classical theory of optimal transport, efficient algorithms to compute it and applications

Contenu:
- Monge Problem, Kantorovich primal and dual
- One dimensional Transport
- Brenier Theorem, c-transform and c-monotony
- Wasserstein Metric and barycenters
- Functional on the space of probability measures (McCann interpolation and displacement convexity)
- Gradient Flows
- Numerical Methods (Entropic Optimal Transport)
- Applications to Machine Learning

O10 – Cours accéléré d'analyse numérique

Etablissement(s) gérant le cours: Paris-Sud
Volume horaire total et par séance: CM: 15h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 0
Semestre 1
Bloc du semestre: 0
Intervenants: Jean-Baptiste Lagaert
Master proposant le cours: AMS, Opti
Lieu des cours: Orsay

Pré-requis:

Description:
Le but de ce cours est de présenter quelques outils de base de l'analyse numérique des équations aux dérivés partielles. Nous aborderons la discrétisation des équations aux dérivés partielles par les méthodes des différences finies, des éléments finis et des volumes finis en dimension 2 d'espace, la mise en oeuvre de ces méthodes en Python et en Matlab, et certains aspects liés à cette mise en oeuvre, tels que la résolution de systèmes linéaires, le calcul de valeurs propres,... Nous aborderons aussi quelques propriétés des solutions discrètes et des méthodes numériques : stabilité, consistance, ordre et convergence.

The aim of this course is to present some tools for the numerical analysis of partial differential equations. We will address the discretization of PDEs by the finite differences, finite elements and finite volumes methods in 2D, the implementation of these methods with Python and Matlab, and some related aspects such as the resolution of linear systems and eigenvalues calculation,... We will also discuss on properties of the discrete solutions and of the numerical methods such as stability, consistency, order and convergence.

O11 – Cours accéléré d'analyse fonctionnelle

Etablissement(s) gérant le cours: Paris-Sud
Volume horaire total et par séance: CM: 15h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 0
Semestre 1
Bloc du semestre: 0
Intervenants: Jean-François Babadjian, Matthieu Léautaud
Master proposant le cours: AMS, Opti
Lieu des cours: Orsay

Pré-requis: Intégration, calcul différentiel

Description:
Le but de ce cours est de rappeler des bases d'analyse fonctionnelle (en se rattachant toujours à des exemples concrets) et d'outils pour les EDP. On conclura par une étude des espaces de Sobolev et de certaines de leurs propriétés importantes.

Contenu:
- Panorama des espaces de fonctions ($C^k, L^p, L^p_{loc}, L^p_{comp}, \mathcal{S}, C^\infty(K)$...) et de leurs topologies (espaces de Hilbert, de Banach, de Fréchet...)
- Espaces L^p (comme exemples d'espaces de Banach, théorèmes de Banach, dualité, réflexivité...)
- Distributions (espaces $\mathcal{D}', \mathcal{E}', \mathcal{S}'$, dérivation, convolution...)
- Transformée de Fourier (sur $\mathcal{S}, \mathcal{S}', L^2$, utilisation pour la résolution d'EDP)
- Espaces de Sobolev (espaces $W^{k,p}(\mathbb{R}^n), H^s(\mathbb{R}^n), W^{k,p}(\Omega)$, injections de sobolev dans C^m et dans L^q, compacité, inégalité de Poincaré, théorèmes de trace, formule de Green-Stokes, résolution du problème de Dirichlet).

AMS-O12 – Cours accéléré de programmation

Etablissement(s) gérant le cours: Orsay
Volume horaire total et par séance: CM: 18h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 0
Semestre 1
Bloc du semestre: 0
Langue anglaise si demandé: oui
Intervenants: Pierre Marchand
Lieu des cours: ENSTA et Orsay
Master proposant le cours:
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: bases d'algèbre linéaire numérique, d'algorithmique et de programmation

Description:
Ce cours introduit le langage C++ et les bonnes pratiques de la programmation pour les mathématiques appliquées dans un environnement Linux. Le C++ est un langage incontournable dans de nombreux domaines comme le calcul scientifique, mais aussi par exemple dans le jeu vidéo, la finance et la gestion de base de données. Ce sont notamment sa portabilité et ses performances qui lui permettent d'être un langage utilisé dans de nombreux contextes.

L'objectif de ce cours est d'introduire des outils de base pour la programmation (environnement de développement, gestion de versions,...), des compétences donc transverses qui seront appliquées à l'apprentissage des bases du C++ et à la mise en place d'un projet informatique collaboratif.

Contenu:

- Les deux premières séances se concentreront sur les outils pour la programmation et une introduction aux bases du C++
  1. Prise en main des outils pour la programmation et compilation en C++ :
     - Commandes de base du terminal,
     - Gestion de versions du code,
     - Utilisation de SSH,
     - Compilation manuelle.
  2. Base du C++ :
     - Allocation dynamique et statique de tableau :
     - Pointeurs et références
- Le deuxième bloc de séances introduira des notions plus avancées du C++, à savoir la programmation orientée objet et la bibliothèque standard C++ (STL, standard template library)
  1. Programmation orientée objet en C++ et automatisation de la compilation :
     - Makefile et CMakefile
     - classes, méthodes et opérateurs
  2. Conteneurs, itérateurs et algorithmes de la STL :
     - List, map, vector, ...
     - Algorithmes de tris, de modifications, ...
- Enfin, le dernier bloc sera constitué d'un miniprojet en groupe qui utilisera les différentes notions introduites précédemment.

O13 – Fonctions propres du Laplacien

Etablissement(s) gérant le cours: Orsay
Volume horaire total et par séance: CM: 18h TD: 0h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Cyril Letrouit
Master proposant le cours:
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS
Lieu des cours: Orsay

Pré-requis:

Description:
Les fonctions propres du Laplacien jouent un rôle clé dans la description d'innombrables phénomènes physiques : vibrations des ponts, des bâtiments, des membranes, acoustique musicale, états stationnaires de particules quantiques, propagation dans des guides d'ondes, connectivité et diffusion sur les réseaux, compression d'images et de sons...

L'analyse mathématique des fonctions propres, outre son intérêt dans l'étude de ces phénomènes, est un sujet riche et actif : propriétés de localisation ou de délocalisation des fonctions propres haute fréquence (chaos quantique), des ensembles nodaux, liens avec les spectres de graphes, fonctions propres d'opérateurs de Schrödinger aléatoires...

Nous présenterons dans ce cours quelques-uns de ces aspects mathématiques.

Contenu:

— Quelques aspects de modélisation et de simulation autour des fonctions propres.
— Fonctions propres sur la sphère.
— Méthode WKB.
— Décroissance exponentielle des fonctions propres d'opérateurs de Schrödinger (effet tunnel).
— Spectre des graphes et spectre des variétés. Inégalité de Cheeger.
— Localisation et délocalisation : normes L^p, ergodicité quantique.

MSX2 – Méthodes numériques avancées et calcul haute performance pour la simulation de phénomènes complexes

Etablissement(s) gérant le cours: Ecole Polytechnique
Volume horaire total et par séance: CM: 15h TD: 15h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Marc Massot
Lieu des cours: Ecole polytechnique
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: Formation de base en EDP et analyse numérique

Description:
Dans un nombre croissant d'applications, scientifiques ou industrielles, la simulation numérique joue un rôle clef pour comprendre et analyser les phénomènes physiques complexes. Elle permet aussi de prédire le fonctionnement de dispositifs comme les chambres de combustion aéronautiques dans l'optique d'une conception avancée. La complexité des systèmes et la taille des simulations multi-dimensionnelles rendent l'utilisation du calcul haute performance nécessaire. Ce cours propose dans un premier temps une présentation des enjeux que pose la modélisation des systèmes complexes pour les méthodes numériques et la simulation et un état de l'art des nouvelles architectures de calcul et des modèles de programmation parallèle. Après avoir rappelé les bases de l'analyse numérique des EDP pour les problèmes multi-échelles, nous proposons d'explorer quelques méthodes numériques avancées conçues pour traiter la raideur présente dans ces modèles complexes tout en tirant le meilleur parti des nouvelles architectures de calcul. Ces méthodes s'appuient sur une combinaison efficace entre analyse numérique, modélisation et calcul scientifique. Des séances de mise en oeuvre sur machines en lien avec le mésocentre de calcul de l'Ecole Polytechnique seront proposées.

Contenu:
- Modélisation mathématique des systèmes complexes multi-échelles.
- Définition de la notion de calcul haute performance et synthèse sur les nouvelles architectures de calcul et modèles de programmation parallèle.
- Analyse numérique des EDP multi-échelles en temps et en espace (Décomposition de domaine, séparation d'opérateur...).
- Présentation et analyse de méthodes numériques avancées (multi-résolution adaptative et séparation d'opérateur avec adaptation temps/espace, algorithme pararéel, méthodes préservant l'asymptotique, méthodes implicite et résolution de systèmes linéaires,...).
- TP sur machine parallèle avec fourniture de codes de calcul à titre d'exemple pour chaque méthode.

Bibliographie:

- M. Duarte, *Adaptive numerical methods in time and space for the simulation of multi-scale reaction fronts*, Thèse Ecole Centrale Paris (2011)
- W. Hundsdorfer et J. Verwer, *Numerical Solution of Time–Dependent Advection–Diffusion–Reaction Equations*, Springer–Verlag, Berlin (2003)
- L. Gosse, *Computing Qualitatively Correct Approximations of Balance Laws*, Springer (2013)
- V. Dolean, P. Jolivet, F. Nataf, *An Introduction to Domain Decomposition Methods : algorithms, theory and parallel implementation* (2015)
- B. Chapman, G. Jost, R. Van Der Pas, *Using OpenMP : Portable Shared Memory Parallel Programming*, The MIT Press (2007)
- W. Gropp, E. Lusk, A. Skjellum, *Using MPI : Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface*, The MIT Press (2014)

MSI1 – Modélisation et simulation des écoulements de fluides en géosciences

Etablissement(s) gérant le cours: INSTN
Volume horaire total et par séance: CM: 18h TD: 12h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Michel Kern, Emmanuel Mouche
Lieu des cours: ENSTA
Langue anglaise si demandé: oui
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: Mathématiques, programmation sous Matlab, bases physiques des lois de conservation

Description:
La simulation numérique des modèles décrivant la physique des phénomènes de transfert dans les couches terrestres superficielles (écoulements de fluides, transport de traceurs) et les couplages associés (température, chimie, mécanique) est devenue une activité incontournable dans tous les secteurs industriels concernés par l'environnement : gestion de la ressource en eau, impact du changement climatique, dépollution de sols et d'aquifères, étude de réservoirs pétroliers et de gaz, géothermie, séquestration du CO_2, stockage de déchets.

Ce cours vise à donner les bases de la modélisation physique et numérique des écoulements de fluides et les couplages associés dans les couches géologiques superficielles ou profondes. Il s'adresse aussi aux étudiantes et aux étudiants désireux de s'orienter vers l'étude des géomatériaux tels que ceux utilisés en génie civil (matériaux cimentaires ou argileux).

Ce cours comporte une partie cours magistral, donnant les bases de la modélisation physique et de la simulation numérique des écoulements, et une partie de travaux pratiques sur PC visant à simuler (sous Matlab, ou d'autres codes), des cas tests d'écoulement et de transport.

Contenu:
— Equation de Darcy, équation de Richards ;
— Equation de transport par convection-diffusion-dispersion ;
— Ecoulement diphasique immiscible ;
— Méthodes de discrétisation spatiale : volumes finis, décentrage ;
— Formulations des écoulements diphasiques, schémas en temps ;
— Résolutionn des systèmes non-linéaires par des méthodes de Picard ou de Newton.

Bibliographie:

— J. E. Aarnes, T. Gimse and K.-A. Lie. *An introduction to the numerics of flow in porous media using Matlab.* http://folk.uio.no/kalie/papers/ResSimMatlab.pdf
— J. Bear and A. Verruijt. Modeling Groundwater Flow and Pollution, Springer-Verlag, 1987.
— R. Helmig. Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface : A Contribution to the Modeling of Hydrosystems. Springer-Verlag 1997.

— Cours de Fritz Stauffer, Ecole Polytechnique de Zürich :
http://www.ifu.ethz.ch/GWH/people/stauffer.

MSI3 – Programmation hybride et multi-coeurs

Etablissement(s) gérant le cours: INSTN
Volume horaire total et par séance: CM: 0h TD: 30h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Marc Tajchman
Lieu des cours: ENSTA
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: Algorithmique, programmation parallèle (MPI), programmation en langage C (notions de C++).

Description:

La course à la puissance des ordinateurs est désormais couplée avec une maîtrise de la consommation de l'énergie et l'impact environnemental.

Désormais, les machines utilisées pour la simulation numérique sont souvent des supercalculateurs à plusieurs dizaines, centaines, voire milliers de processeurs multi cœurs, éventuellement couplés avec des accélérateurs.

Ces nouvelles architectures amènent à repenser la façon dont les programmes de simulation sont écrits.

Ainsi, on peut imaginer que l'utilisation de la seule bibliothèque MPI pourra être limitée par un trop grand nombre de tâches à gérer simultanément, et qu'il faut alors utiliser plusieurs niveaux de parallélisme.

Le cours est organisé en séances de cours et d'applications pratiques au travers de TPs et permettra d'aborder les problématiques de la programmation hybride MPI+OpenMP ainsi que la programmation d'accélérateurs graphiques.

Contenu:
- Evolution des architectures de calcul et des modèles de programmation (cours) ;
- Programmation en mémoire partagée à l'aide d'OpenMP (cours+TP) ;
- Programmation en mémoire partagée à l'aide d'autres outils que OpenMP (cours+TP) ;
- Programmation hybride MPI+OpenMP (cours+TP) ;
- Programmation de cartes graphiques (GPU) pour le calcul scientifique y compris programmation hybride OpenMP-GPU et MPI-GPU (cours+TP) ;

Bibliographie:

- Page Web du cours : https://perso.ensta-paris.fr/∼tajchman

MSI5 – Simulation numérique en physique des plasmas

Etablissement(s) gérant le cours: INSTN
Volume horaire total et par séance: CM: 0h TD: 18h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Jean Clerouin, Yves Peysson
Lieu des cours: ENSTA
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: Avoir suivi le cours AMS309

Description:
Plasmas : Modèles et méthodes de simulation sont abordées sur quatre types spécifiques de plasmas : ceux créés par lasers de puissance, dans les contextes de la fusion par confinement inertiel, d'une part, et des impulsions laser ultraintenses, d'autre part (années impaires). Les plasmas denses, typiquement à la densité du solide, intervenant dans la compréhension du coeur de cible de fusion inertielle et des coeurs d'étoile ou de planète sont présentés. Enfin les plasmas de fusion par confinement magnétique sont présentés, pour analyser le chauffage par onde et l'induction de courant au sein d'un tokamak (années paires).

Contenu:
- Choc et instabilité hydrodynamique
- Propagation onde de très forte amplitude : instabilités et accélération de particules : méthodes particulaires
- Problèmes à N corps, équations d'état : dynamique moléculaire et méthode Monte-Carlo
- Cinétique d'un plasma magnétisé et interaction onde - plasma : modèle de Fokker-Planck et tracé de rayons

Bibliographie:

- J.M. Rax, *Physique des tokamaks*, Ecole Polytechnique 2011
- B. W. Carroll & D. A. Ostlie, *An introduction to modern astrophysics*, Addison-Wesley 1996

MSI6 – Simulation numérique en astrophysique

Etablissement(s) gérant le cours: INSTN
Volume horaire total et par séance: CM: 0h TD: 18h séance: 3h
ECTS: 3
Semestre 2
Bloc du semestre: 3
Intervenants: Edouard Audit, Sacha Brun, Stéphane Mathis, Pascal Tremblin
Lieu des cours: ENSTA
Langue anglaise si demandé: oui
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): MS

Pré-requis: AMS309, base de programmation, base en mécanique des fluides

Description:
Ce cours fait suite au cours AMS309 et a pour objectif d'approfondir certaines thématiques astrophysiques où la modélisation est au coeur de l'activité de recherche. Ce cours est articulé autour de présentation théorique de modèles utilisés en astrophysique qui sont ensuite mis en oeuvre lors de petits projets numériques. Les thématiques abordées sont la physique stellaire et planétaire, le milieu interstellaire et la formation des galaxies (les projets tournent chaque année). cela nécessite l'introduction de modèles physiques variés incluant l'hydrodynamique, éventuellement avec la présence de champ magnétique (magnéto-hydrodynamique), la gravitation, le transfert du rayonnement, des mécanismes thermo-chimiques,... Les méthodes numériques permettant de rendre compte de ces phénomènes sont également abordées.

E1 – Analyse fonctionnelle pour les équations de Navier Stokes

Etablissement(s) gérant le cours: Evry
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: 0h séance: 0h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Intervenants: Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset, Diego Chamorro
Lieu des cours: Orsay
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM

Description:
Le cours propose une introduction au problème de Navier-Stokes sur l'espace tout entier. Il s'agit de trouver u définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ telle que

- u est à divergence nulle $\nabla \cdot u = 0$,
- u vérifie l'équation aux dérivées partielles,

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \nu \Delta u + f$$

  avec ν positif constant et f une force extérieure donnée.
- u est solution du problème de Cauchy $u(0, x) = u_0(x)$

Contenu:

- Modélisation de l'hydrodynamique : Modélisation des équations de l'hydrodynamique. Cas d'un fluide incompressible, newtonien, isotrope et homogène.
- Solutions classiques : Détermination des potentiels hydrostatique de Lorentz et hydrodynamique d'Oseen. Existence de solutions classiques des équations de Navier-Stokes (méthode des séries).
- Solutions mild : Existence de solutions au sens des distributions : méthode des itérations de Picard (théorie de Kato et Fujita).
- Solutions faibles : Existence de solutions au sens des distributions : inégalités d'énergie et méthodes de compacité (théorie de Leray).
- Critères de régularité (Serrin) : On présentera les théorèmes classiques de Serrin : unicité fort-faible, régularité locale, critères de non-explosion.
- Discussion des cas stationnaires et auto-similaires.
- Théorème de Koch Tataru (données BMO^{-1}).

CS1 – Méthodes de Moments dérivées d'une équation cinétique

Etablissement(s) gérant le cours: Centrale Supélec
Volume horaire total et par séance: CM: 30h TD: h séance: 3h
ECTS: 5
Semestre 1
Bloc du semestre: 2
Langue anglaise si demandé: oui
Intervenants: Frédérique Laurent-Nègre, Teddy Pichard
Lieu des cours: Centrale Supélec, Campus de Gif-sur-Yvette
Master proposant le cours:
Finalité associée au cours (AM et/ou MS): AM et MS

Pré-requis: Bases d'algèbre et de théorie de la mesure

Description:
Divers problèmes, notamment en mécanique des fluides ou en ingénierie, peuvent être décrits par une équation de type cinétique, par exemple en théorie cinétique des gaz avec l'équation de Boltzmann ou pour la description de population de particules de tailles variées avec la Population Balance Equation. Cette équation est rarement résolue directement à cause du coût engendré. On passe plutôt à un problème macroscopique, via la méthode des moments, comme dans le cas des équations d'Euler. On remplace alors l'équation de type cinétique par des équations sur les premiers moments de la distribution sous-jacente. Dans ce cours, il s'agit de comprendre comment on développe ces méthodes macroscopiques à partir d'une description dite mésoscopique de type cinétique, et en particulier quelles types de fermetures sont utilisées, de caractériser l'espace dans lequel évoluent ces moments (espace des moments), d'étudier certaines propriétés mathématiques des modèles obtenus et de donner quelques méthodes de résolution des équations, en lien avec leurs propriétés mathématiques et préservant l'espace des moments.
Modalités d'évaluation : évaluation orale (synthèse d'article).

Contenu:
— Introduction : applications - équation cinétique / population balance équation
— Espace des moments - lien avec la théorie des polynômes orthogonaux
— Méthodes de moments classiques pour les gaz mono-atomiques - propriétés mathématiques
— Cas des populations de particules : fermetures dans le cas mono-varié
— Méthodes numériques réalisables dans le cas mono-varié
— Cas multi-varié : difficultés théoriques et numériques supplémentaires - quelques exemples de modèles et méthodes numériques
— Cas du transfert radiatif : moments sur la sphère unité

Bibliographie:

— D. L. Marchisio, R. O. Fox, Computational Models for Polydisperse Particulate and Multiphase Systems, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2013.

— H. Dette, W. J. Studden, The Theory of Canonical Moments with Applications in Statistics, Probability, and Analysis, Wiley-Interscience, 1997.

— J. B. Lasserre, Moments, positive polynomials and their applications, Vol. 1 of Imperial College Press Optimization Series, Imperial College Press, London (2010).