Feuille d'exercices n° 3 : Fonction d'une variable aléatoire : exemples concrets.

Exercice 1. Dans cet exercice, lorsqu'est demandé de préciser la loi d'une variable aléatoire, on donnera la fonction de répartition, et si cela a un sens, la densité.

1. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, notée Unif$(0,1)$. Quelle loi suit X^2 ?
2. On suppose que X^2 suit la loi uniforme sur $[0,1]$, et $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$. Quelle loi suit X ?
3. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0,\pi]$. Quelle loi suit $\cos(X)$?
4. On suppose que $\cos(X)$ suit la loi uniforme sur $[-1,1]$, et $\mathbb{P}(X \in [0,\pi]) = 1$. Quelle loi suit X ?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de loi Exp(α), pour $\alpha > 0$.

1. Quelle loi suit αX ?
2. Quelle loi suit $Y = e^X$?

On précisera dans les deux cas la valeur de la densité si la variable en admet une.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Quelle loi suit $\mu + \sigma X$, pour $\mu \in \mathbb{R}$, et $\sigma > 0$?
2. Quelle loi suit $Y = X^2$. Reconnaître une loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ pour des paramètres à préciser.

Exercice 4. Un bout de bois est cassé en un point uniforme, formant deux bouts ; si l'on assimile le bout de bois à l'intervalle unité $[0,1]$, quelle est la loi de la longueur du bout contenant la marque d'abscisse p, pour $p \in [0,1]$? Quelle loi retrouve-t-on lorsque $p = 1/2$?

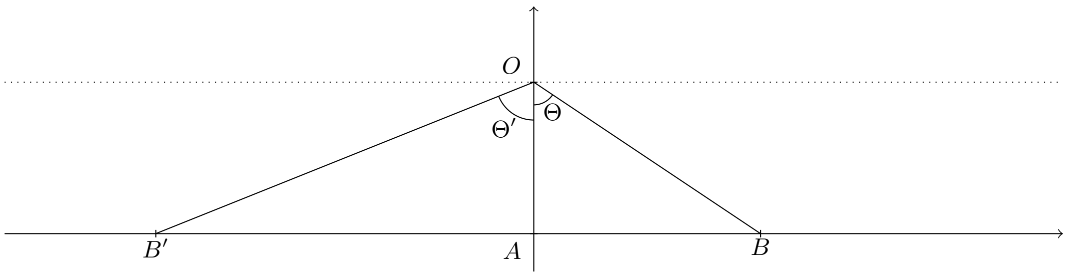
Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{C}(a)$ pour $a > 0$, qui est la loi de densité $x \mapsto \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la fonction de répartition et en déduire que la fonction proposée est bien une densité.
2. Quelle loi suit X/a?
3. Quelle loi suit $Y = 1/X$?

Pour la dernière question, on pourra librement utiliser la relation : pour $x \neq 0$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}(\mathbb{1}_{x>0} - \mathbb{1}_{x<0})$.

Exercice 6. On considère un repère cartésien d'origine O et A le point de coordonnées $(0,-1)$. Pour $\Theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, il existe un unique point B d'ordonnée -1 que l'angle $\widehat{AOB}$ est de Θ radians ; on note alors X l'abscisse de B.

Ci-dessous, deux valeurs d'angles possibles : $\Theta > 0$ et $\Theta' < 0$, et les points B et B' correspondants :



Si Θ suit la loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$, montrer que X suit la loi $\mathcal{C}(1)$.

Exercice 7. (Simulation à partir de la loi uniforme.) Soit F fonction de répartition qui réalise une bijection d'un intervalle I sur $]0,1[$, et U une variable aléatoire de loi Unif$(0,1)$.

1. Quelle est la fonction de répartition de $F^{-1}(U)$? En déduire la loi de $F^{-1}(U)$.

Préciser I pour les deux lois suivantes, la bijection réciproque $F^{-1} :]0,1[\to I$:

2. F fonction de répartition de Exp(λ) pour $\lambda > 0$.
3. F fonction de répartition de $\mathcal{C}(a)$ pour $a > 0$.

Application : Quelle est la loi de

4. $Z = \frac{-\ln U}{\lambda}$
5. $W = a \tan(\pi(U - \frac{1}{2}))$.