Géométrie, algèbre, arithmétique : jadis et naguère

Jean-Benoît Bost et Thomas Mordant

Université Paris-Saclay
Fondation Mathématique Jacques Hadamard

Paris-Saclay Summit

12 février 2025

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique,

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif :

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif : *raconter* de *vraies* mathématiques,

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif : *raconter* de *vraies* mathématiques, en nous efforçant de ne pas jargonner, mais plutôt de faire partager notre émerveillement.

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif : *raconter* de *vraies* mathématiques, en nous efforçant de ne pas jargonner, mais plutôt de faire partager notre émerveillement.

  Exposé-promenade *tout public*

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif : *raconter* de *vraies* mathématiques, en nous efforçant de ne pas jargonner, mais plutôt de faire partager notre émerveillement.

  Exposé-promenade *tout public* : plat, puis dénivelé,

Objectif : Mathématiques "vues de l'intérieur"

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif : *raconter* de *vraies* mathématiques, en nous efforçant de ne pas jargonner, mais plutôt de faire partager notre émerveillement.

  Exposé-promenade *tout public* : plat, puis dénivelé, puis plateau, avec vue sur les hauteurs.

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif : *raconter* de *vraies* mathématiques, en nous efforçant de ne pas jargonner, mais plutôt de faire partager notre émerveillement.

  Exposé-promenade *tout public* : plat, puis dénivelé, puis plateau, avec vue sur les hauteurs.

  Petite allure... et plus grande partie de notre présentation.

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif : *raconter* de *vraies* mathématiques, en nous efforçant de ne pas jargonner, mais plutôt de faire partager notre émerveillement.

  Exposé-promenade *tout public* : plat, puis dénivelé, puis plateau, avec vue sur les hauteurs.

  Petite allure... et plus grande partie de notre présentation.

- Retour sur les aspects historiques des étapes de notre promenade.

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif : *raconter* de *vraies* mathématiques, en nous efforçant de ne pas jargonner, mais plutôt de faire partager notre émerveillement.

  Exposé-promenade *tout public* : plat, puis dénivelé, puis plateau, avec vue sur les hauteurs.

  Petite allure... et plus grande partie de notre présentation.

- Retour sur les aspects historiques des étapes de notre promenade.

- Quelques remarques sur l’activité mathématique,

Objectif : Mathématiques "vues de l'intérieur"

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif : *raconter* de *vraies* mathématiques, en nous efforçant de ne pas jargonner, mais plutôt de faire partager notre émerveillement.

  Exposé-promenade *tout public* : plat, puis dénivelé, puis plateau, avec vue sur les hauteurs.

  Petite allure... et plus grande partie de notre présentation.

- Retour sur les aspects historiques des étapes de notre promenade.

- Quelques remarques sur l'activité mathématique, comme activité humaine,

Objectif : Mathématiques “vues de l’intérieur”

- Une promenade mathématique, destinée à offrir un aperçu de notre domaine de recherche, la géométrie algébrique.

  Objectif : *raconter* de *vraies* mathématiques, en nous efforçant de ne pas jargonner, mais plutôt de faire partager notre émerveillement.

  Exposé-promenade *tout public* : plat, puis dénivelé, puis plateau, avec vue sur les hauteurs.

  Petite allure... et plus grande partie de notre présentation.

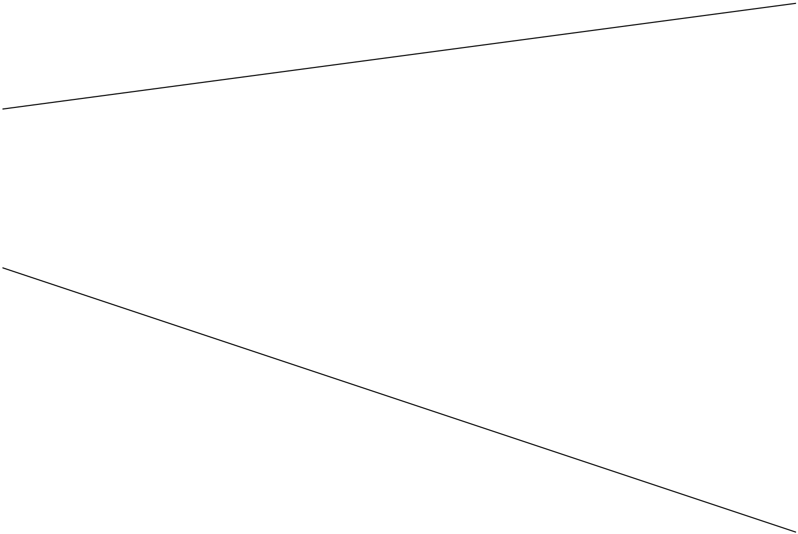
- Retour sur les aspects historiques des étapes de notre promenade.

- Quelques remarques sur l’activité mathématique, comme activité humaine, remarques destinées à compléter les clichés habituels.

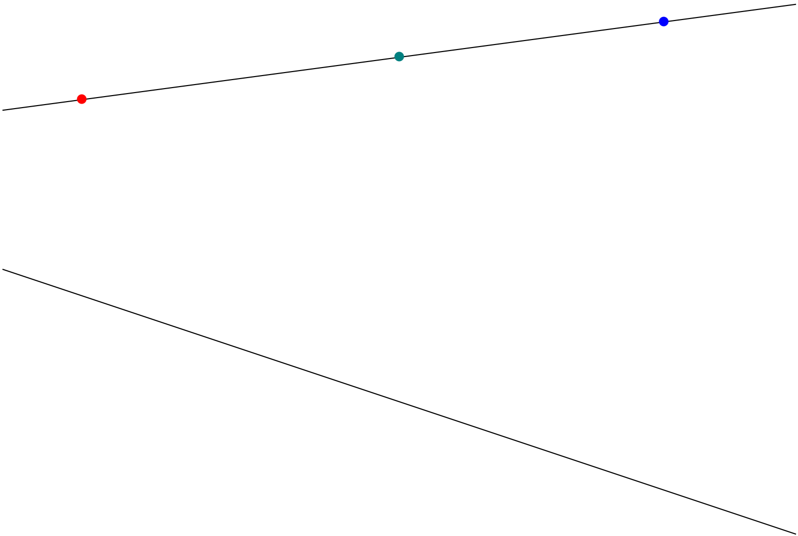
I. Crescendo in C : couleurs, coniques, cubiques, courbes algébriques et cohomologie

Des lignes et des couleurs I

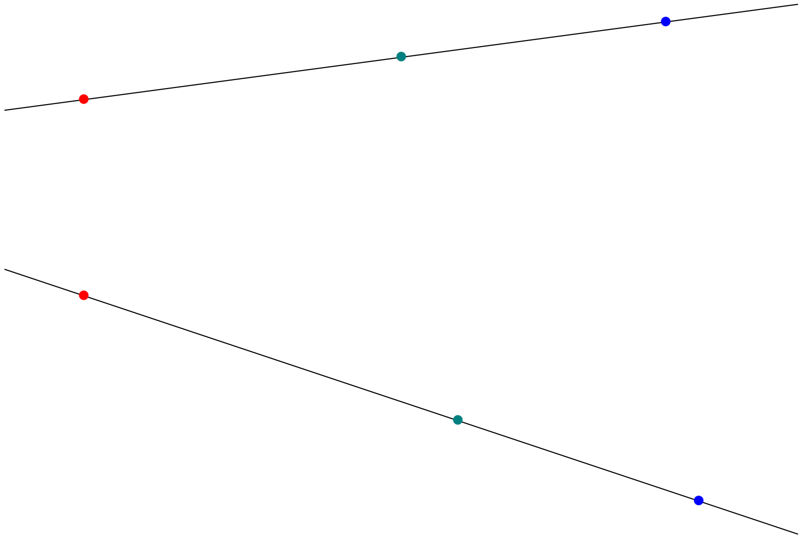
Des lignes et des couleurs I



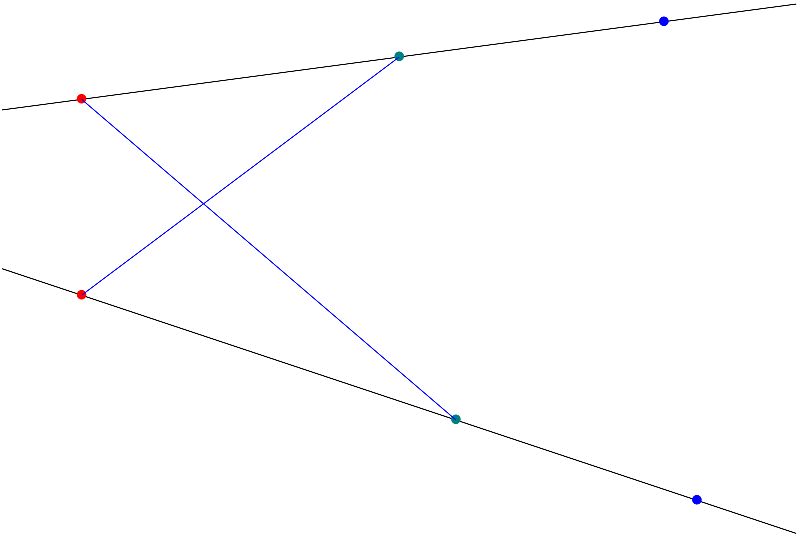
Des lignes et des couleurs I



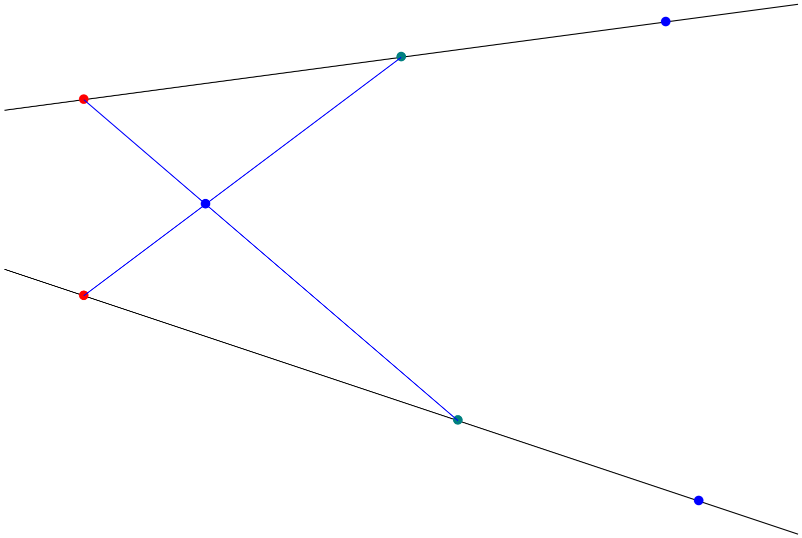
Des lignes et des couleurs I



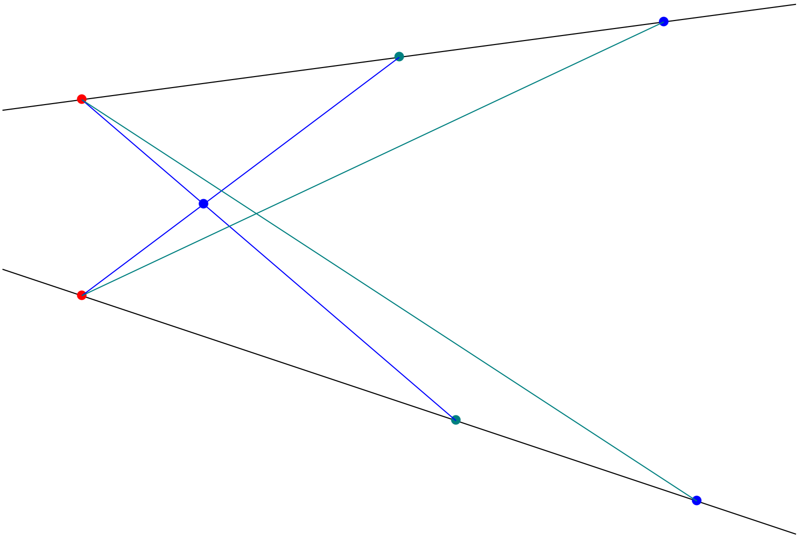
Des lignes et des couleurs I



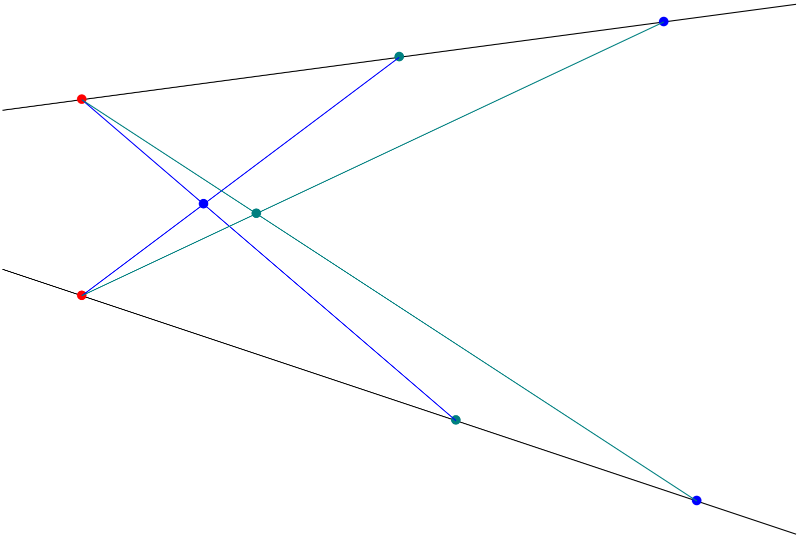
Des lignes et des couleurs I



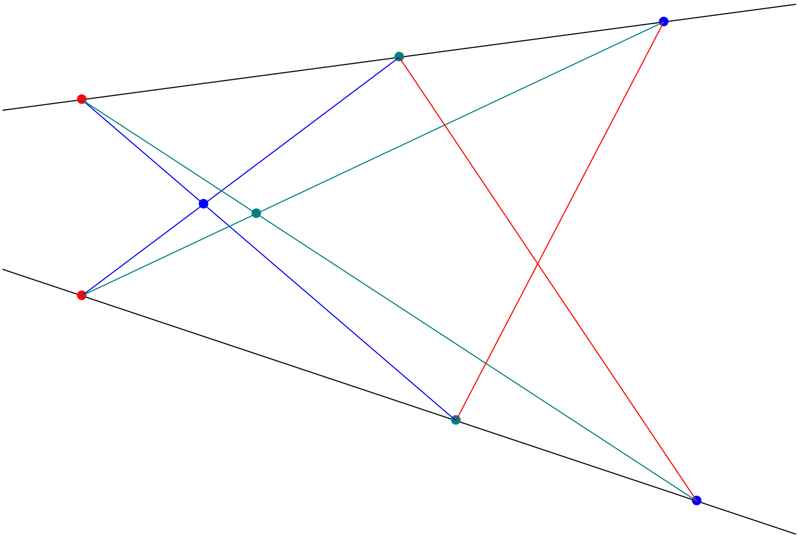
Des lignes et des couleurs I



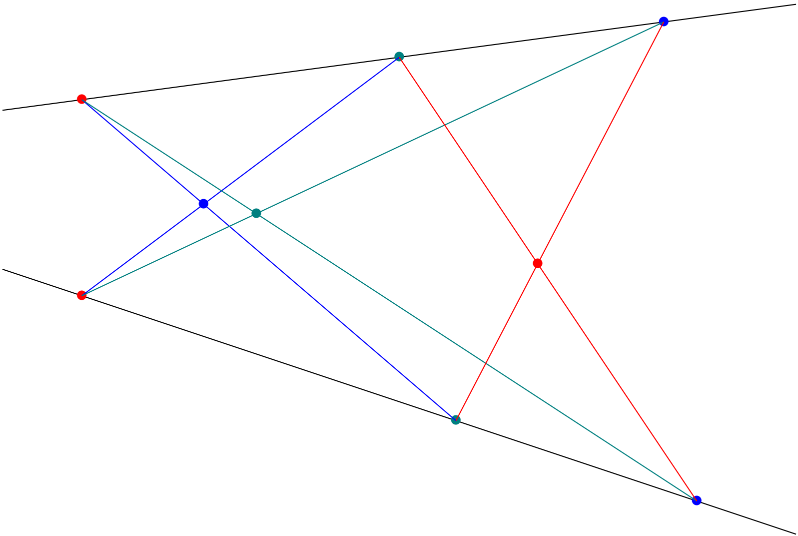
Des lignes et des couleurs I



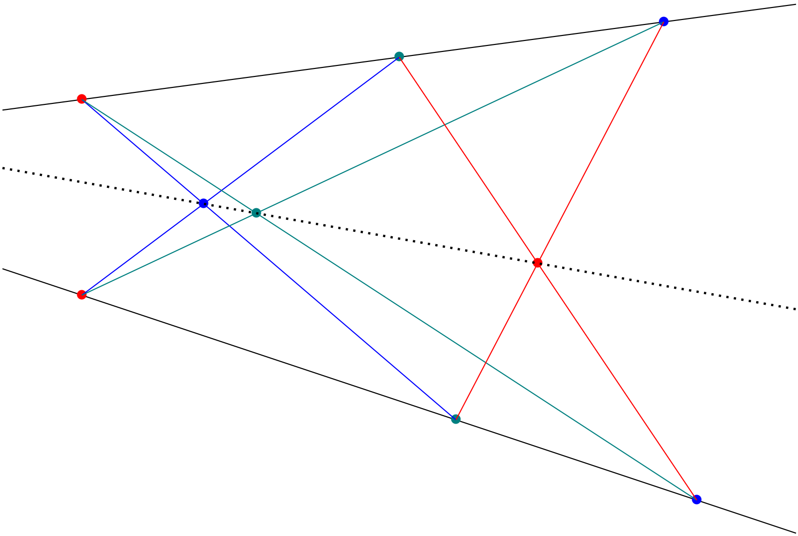
Des lignes et des couleurs I



Des lignes et des couleurs I

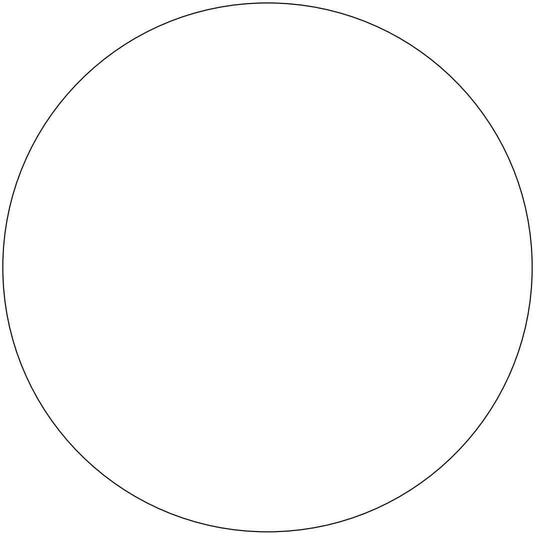


Des lignes et des couleurs I

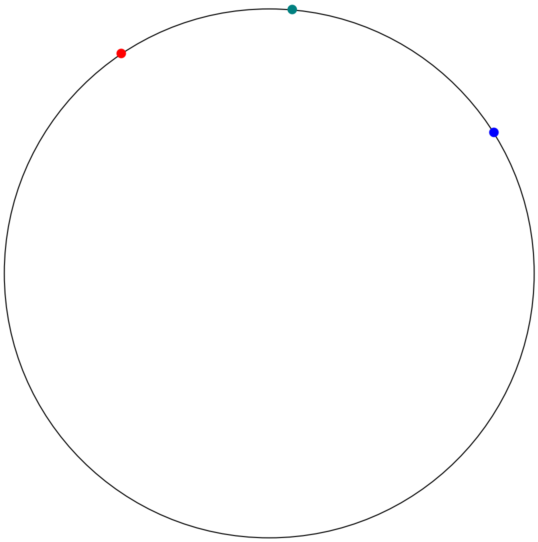


Des lignes et des couleurs II

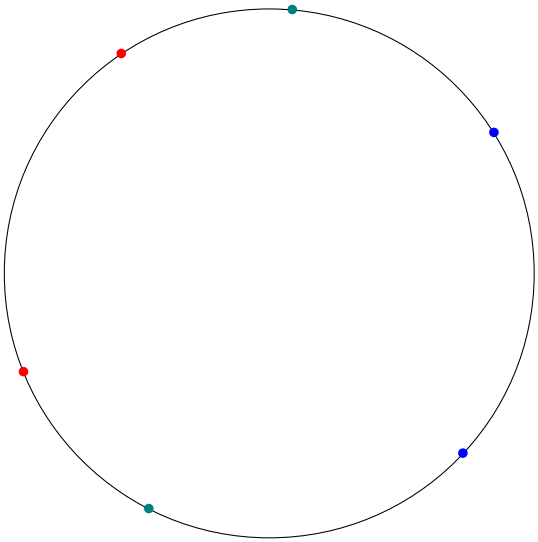
Des lignes et des couleurs II



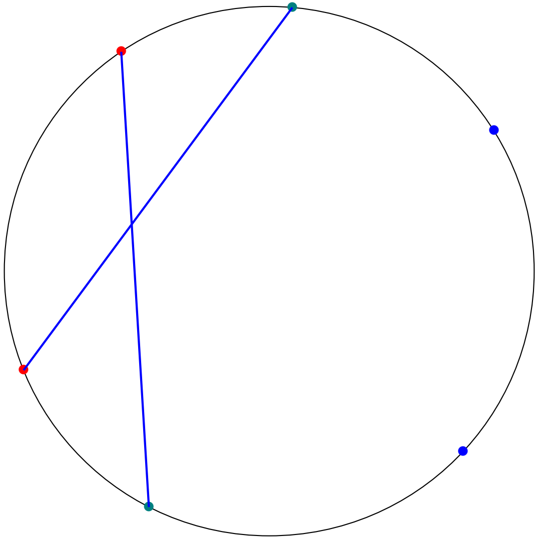
Des lignes et des couleurs II



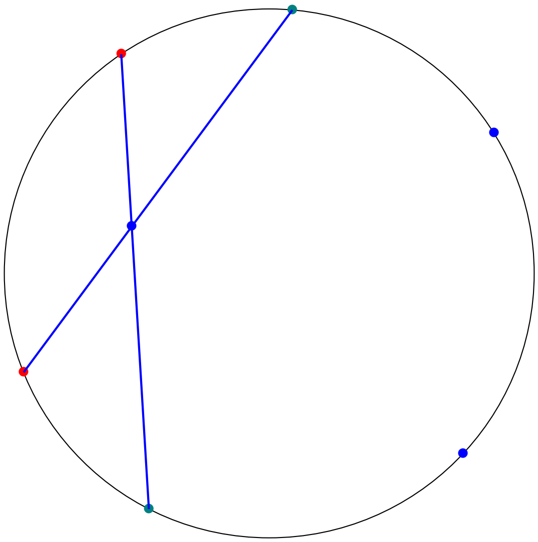
Des lignes et des couleurs II



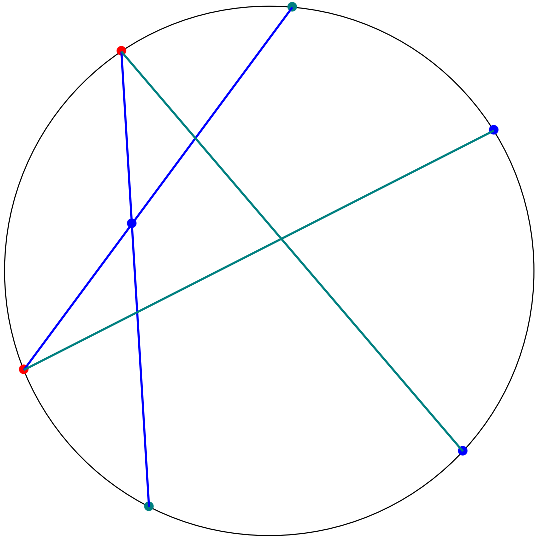
Des lignes et des couleurs II



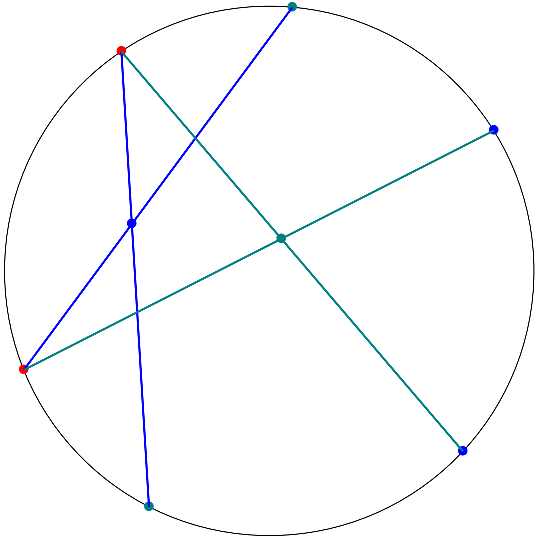
Des lignes et des couleurs II



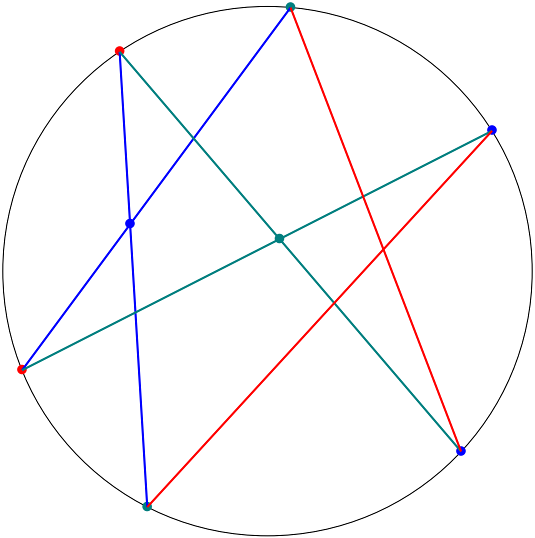
Des lignes et des couleurs II



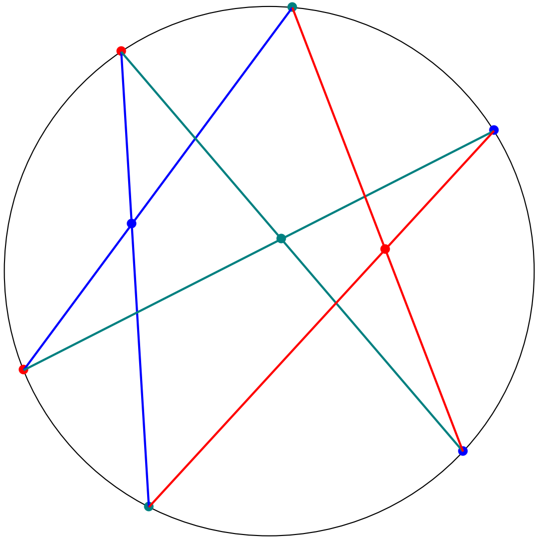
Des lignes et des couleurs II



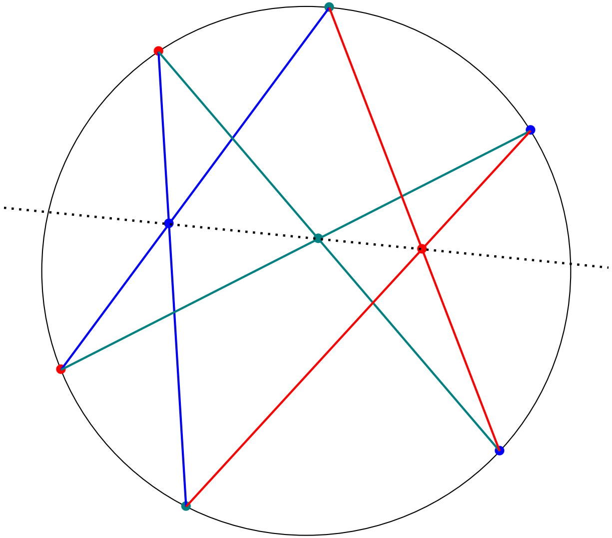
Des lignes et des couleurs II



Des lignes et des couleurs II

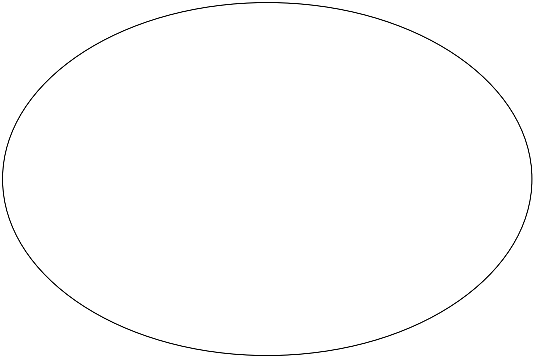


Des lignes et des couleurs II

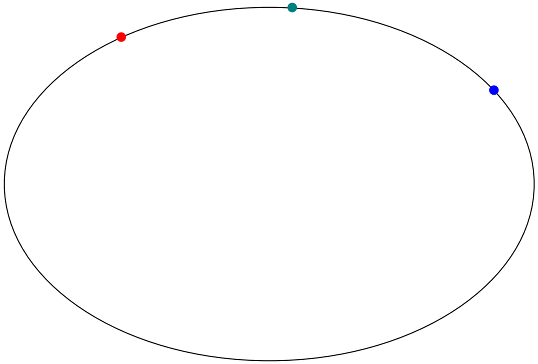


Des lignes et des couleurs II

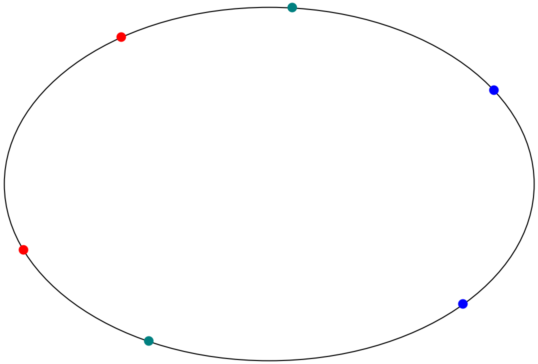
Des lignes et des couleurs II



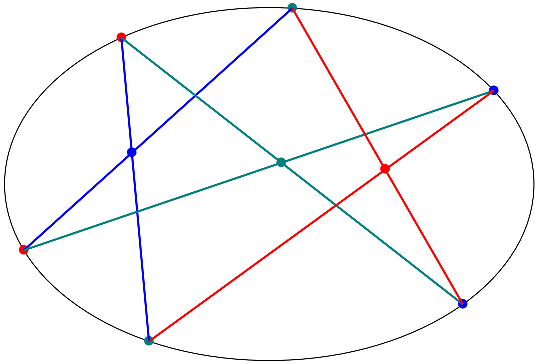
Des lignes et des couleurs II



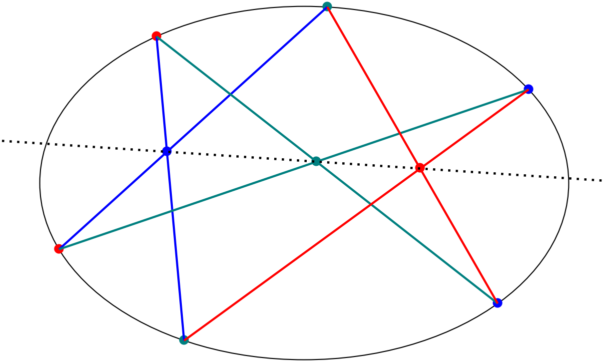
Des lignes et des couleurs II



Des lignes et des couleurs II



Des lignes et des couleurs II



Des lignes et des couleurs I et II

Des lignes et des couleurs I et II

Cercles et ellipses sont des coniques,

Des lignes et des couleurs I et II

Cercles et ellipses sont des coniques, c'est-à-dire des courbes planes définies en coordonnées par l'annulation d'un polynôme de degré 2.

Des lignes et des couleurs I et II

Cercles et ellipses sont des coniques, c'est-à-dire des courbes planes définies en coordonnées par l'annulation d'un polynôme de degré 2.

Le cercle de centre 0 et rayon R admet pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Des lignes et des couleurs I et II

Cercles et ellipses sont des coniques, c'est-à-dire des courbes planes définies en coordonnées par l'annulation d'un polynôme de degré 2.

Le cercle de centre 0 et rayon R admet pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Si D_1 et D_2 sont deux droites, d'équations :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Des lignes et des couleurs I et II

Cercles et ellipses sont des coniques, c'est-à-dire des courbes planes définies en coordonnées par l'annulation d'un polynôme de degré 2.

Le cercle de centre 0 et rayon R admet pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Si D_1 et D_2 sont deux droites, d'équations :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

alors l'union des deux droites $D_1 \cup D_2$ admet pour équation :

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

Des lignes et des couleurs I et II

Cercles et ellipses sont des coniques, c'est-à-dire des courbes planes définies en coordonnées par l'annulation d'un polynôme de degré 2.

Le cercle de centre 0 et rayon R admet pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Si D_1 et D_2 sont deux droites, d'équations :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

alors l'union des deux droites $D_1 \cup D_2$ admet pour équation :

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

de degré $1 + 1 = 2$,

Des lignes et des couleurs I et II

Cercles et ellipses sont des coniques, c'est-à-dire des courbes planes définies en coordonnées par l'annulation d'un polynôme de degré 2.

Le cercle de centre 0 et rayon R admet pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Si D_1 et D_2 sont deux droites, d'équations :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

alors l'union des deux droites $D_1 \cup D_2$ admet pour équation :

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

de degré $1 + 1 = 2$, car elle s'écrit encore :

$$a_1a_2x^2 + b_1b_2y^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)xy + (a_1c_2 + a_2c_1)x + (b_1c_2 + b_2c_1)y + c_1c_2 = 0$$

Des lignes et des couleurs I et II

Cercles et ellipses sont des coniques, c'est-à-dire des courbes planes définies en coordonnées par l'annulation d'un polynôme de degré 2.

Le cercle de centre 0 et rayon R admet pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Si D_1 et D_2 sont deux droites, d'équations :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

alors l'union des deux droites $D_1 \cup D_2$ admet pour équation :

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

de degré $1 + 1 = 2$, car elle s'écrit encore :

$$a_1a_2x^2 + b_1b_2y^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)xy + (a_1c_2 + a_2c_1)x + (b_1c_2 + b_2c_1)y + c_1c_2 = 0$$

C'est donc une conique “dégénérée”.

Pinceaux de cubiques

Pinceaux de cubiques

- Pinceau (*engl.* pencil) = faisceau (*it.* fascio)

Pinceaux de cubiques

- Pinceau (*engl.* pencil) = faisceau (*it.* fascio)
  := (TLF) Ensemble de droites, de courbes, de surfaces dépendant d'un même paramètre.

Pinceaux de cubiques

- Pinceau (*engl.* pencil) = faisceau (*it.* fascio)
  := (TLF) Ensemble de droites, de courbes, de surfaces dépendant d'un même paramètre. Ensemble d'éléments convergents et qui forment un tout homogène.

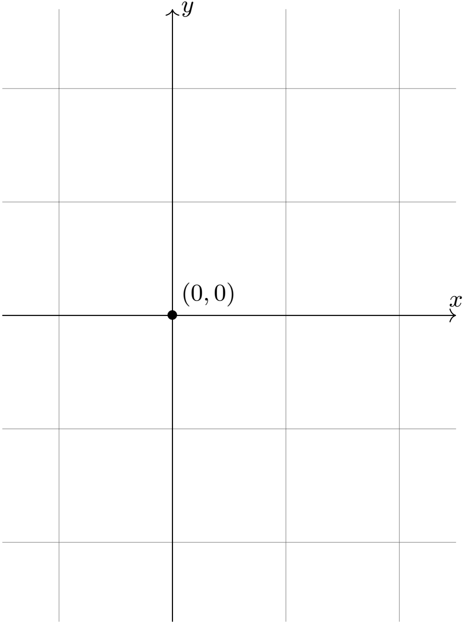
Pinceaux de cubiques

- Pinceau (*engl.* pencil) = faisceau (*it.* fascio)
  := (TLF) Ensemble de droites, de courbes, de surfaces dépendant d'un même paramètre. Ensemble d'éléments convergents et qui forment un tout homogène.

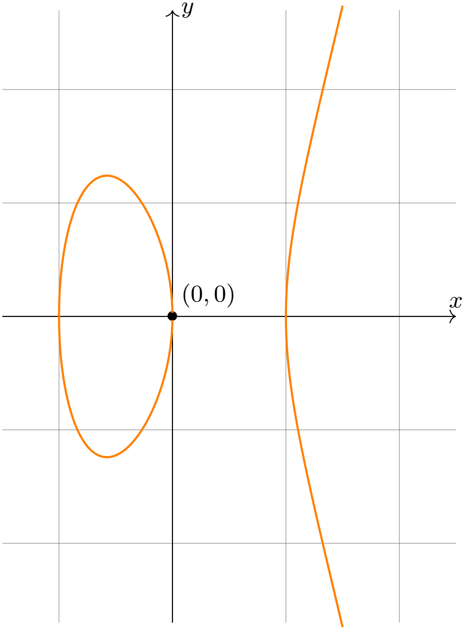
- Cubique := courbe plane définie par l'annulation d'un polynôme en deux variables de degré 3.

La cubique d'équation $y^2 - 4(x^3 - x) = 0$

La cubique d'équation $y^2 - 4(x^3 - x) = 0$

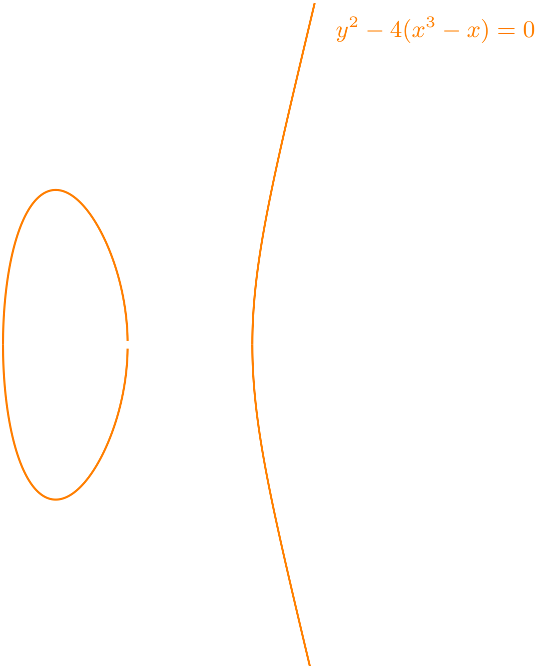


La cubique d'équation $y^2 - 4(x^3 - x) = 0$

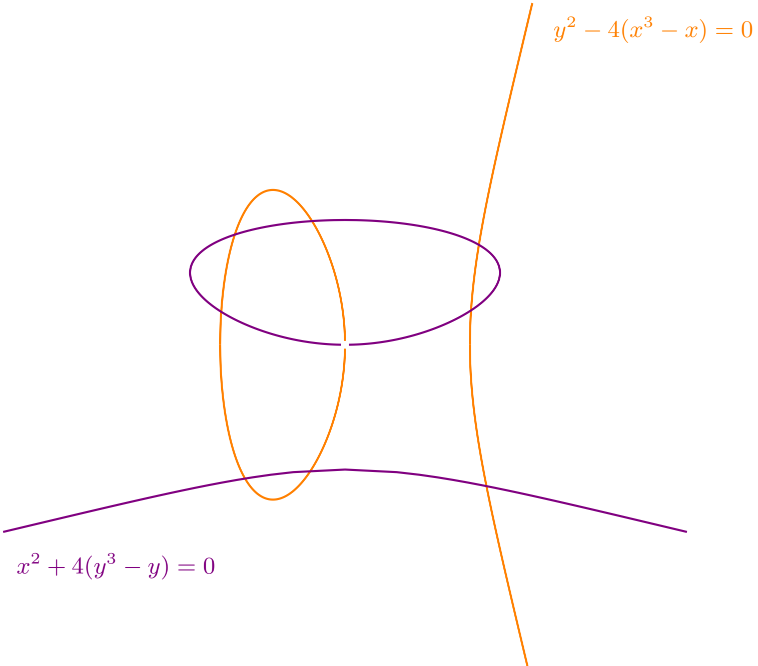


Intersection de deux cubiques

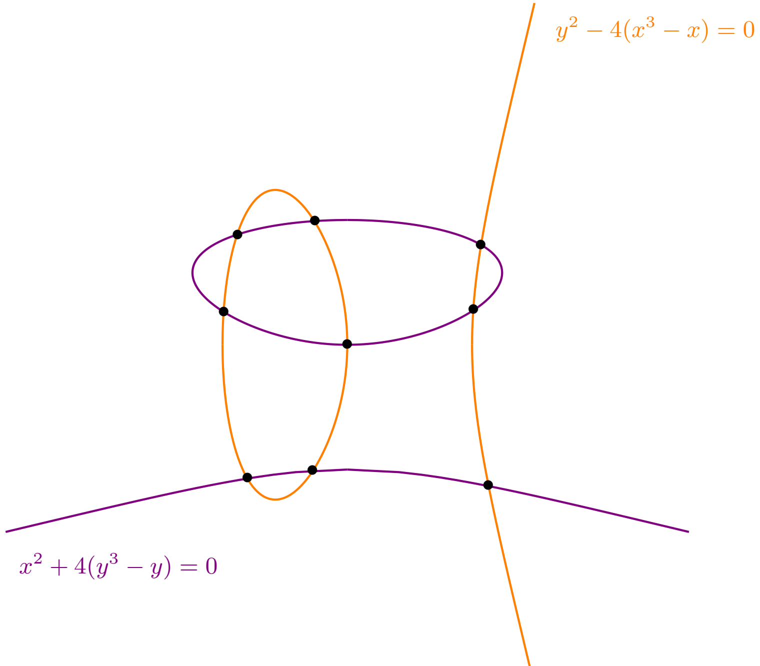
Intersection de deux cubiques



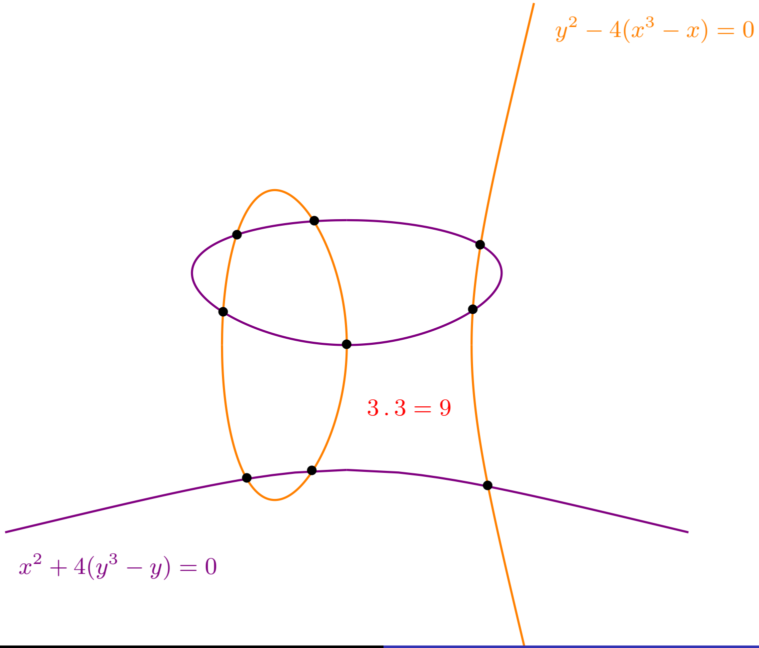
Intersection de deux cubiques



Intersection de deux cubiques

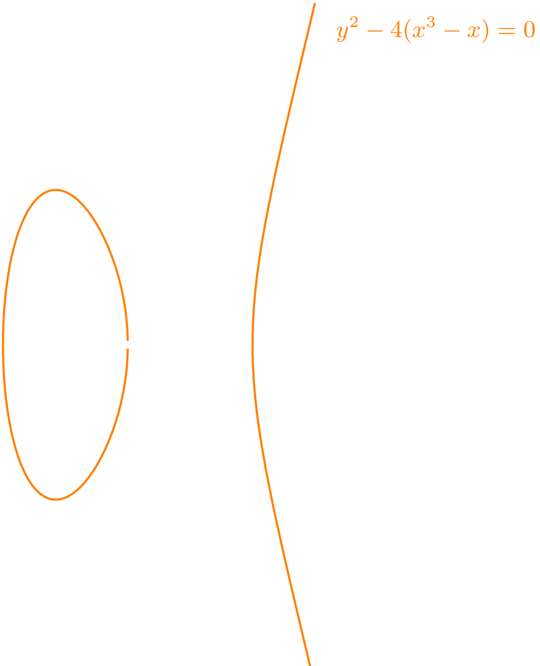


Intersection de deux cubiques

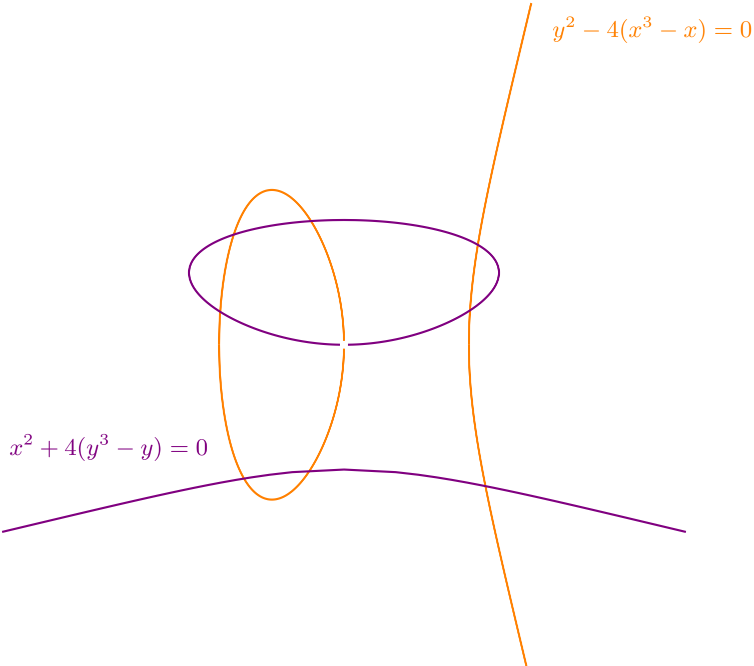


Pinceaux de cubiques

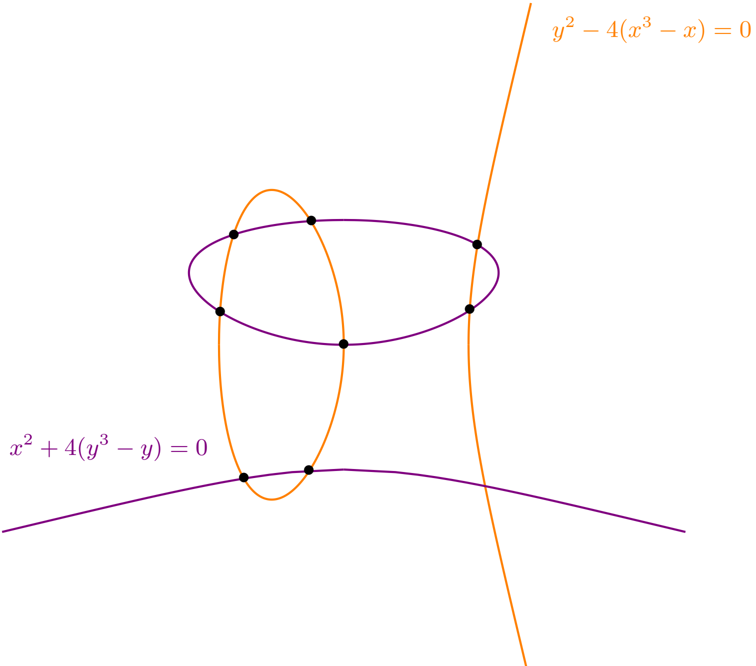
Pinceaux de cubiques



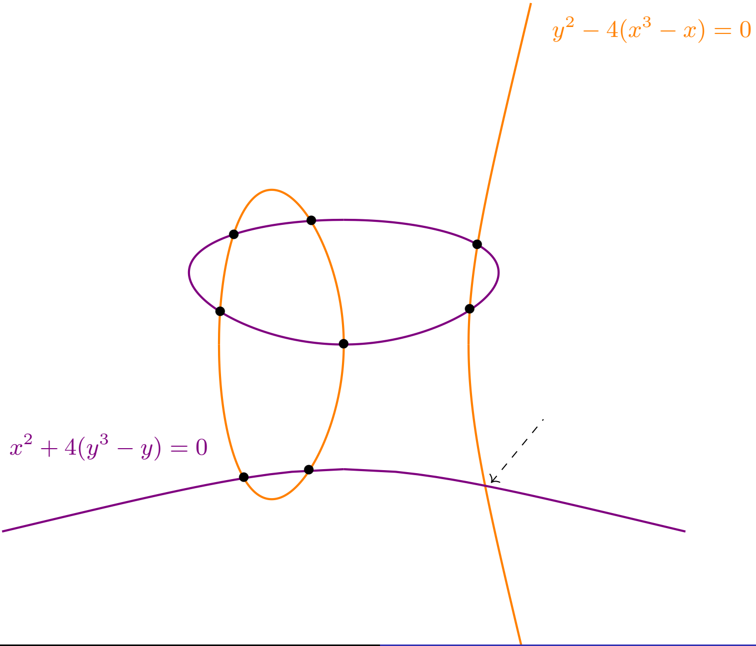
Pinceaux de cubiques



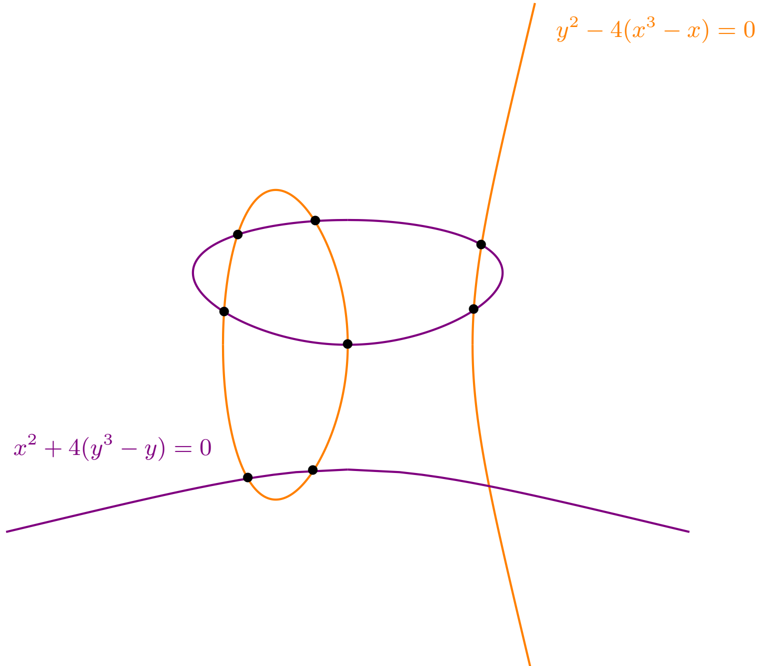
Pinceaux de cubiques



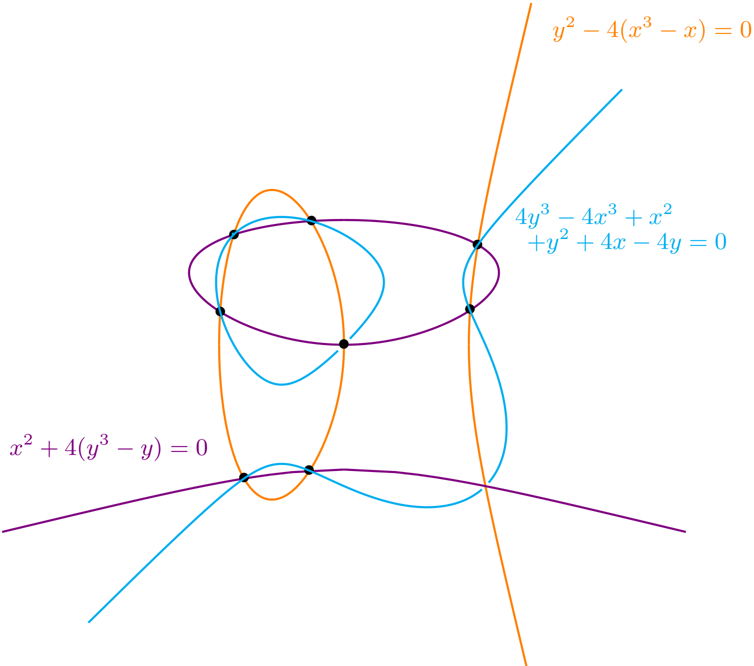
Pinceaux de cubiques



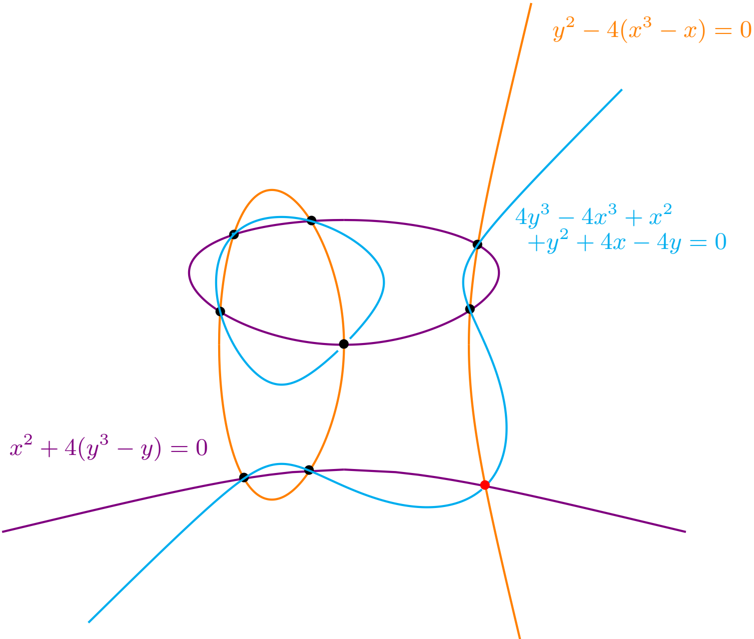
Pinceaux de cubiques



Pinceaux de cubiques

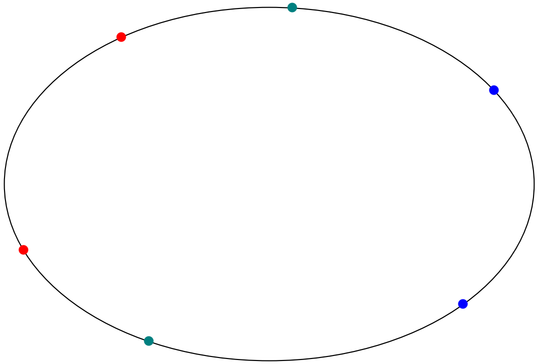


Pinceaux de cubiques

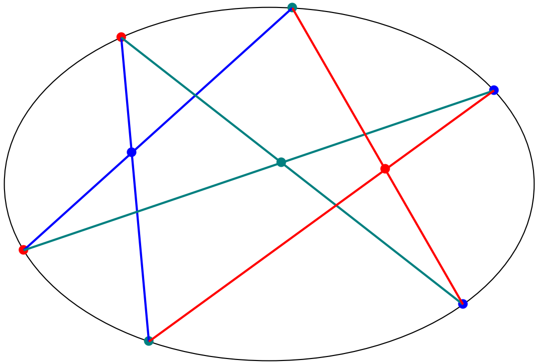


Des lignes et des couleurs II

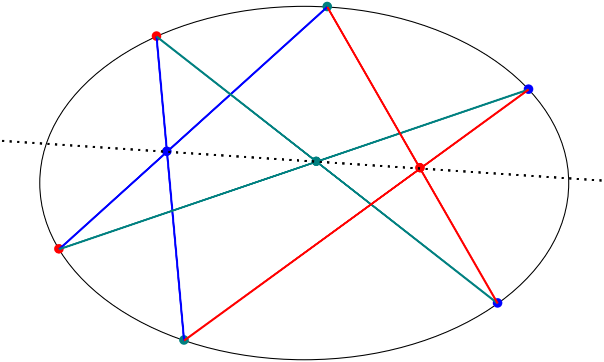
Des lignes et des couleurs II



Des lignes et des couleurs II

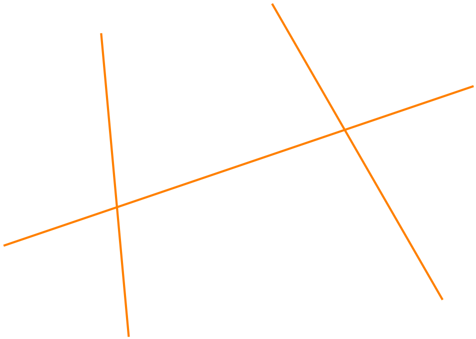


Des lignes et des couleurs II

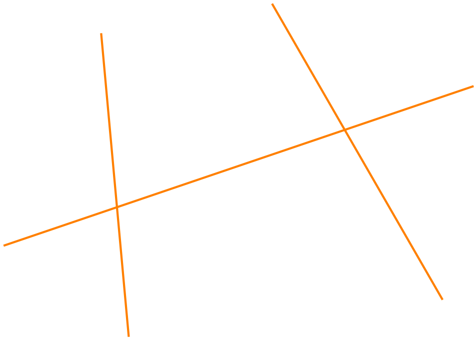


Pinceaux de cubiques $\Longrightarrow$ Lignes et couleurs

Pinceaux de cubiques $\Longrightarrow$ Lignes et couleurs

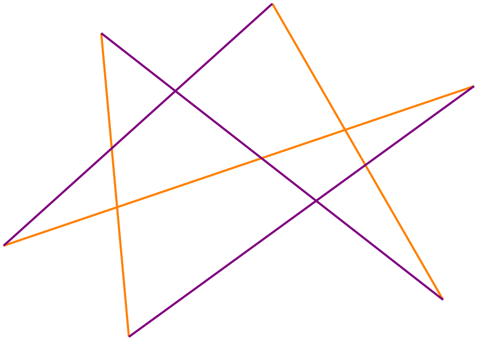


Pinceaux de cubiques $\Longrightarrow$ Lignes et couleurs



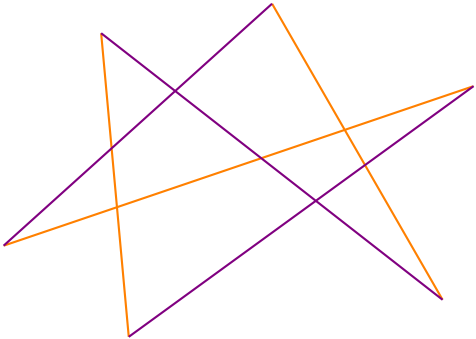
$1 + 1 + 1 = 3$

Pinceaux de cubiques $\Longrightarrow$ Lignes et couleurs



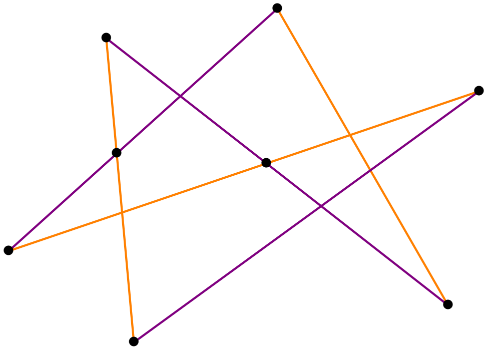
$1 + 1 + 1 = 3$

Pinceaux de cubiques $\Longrightarrow$ Lignes et couleurs



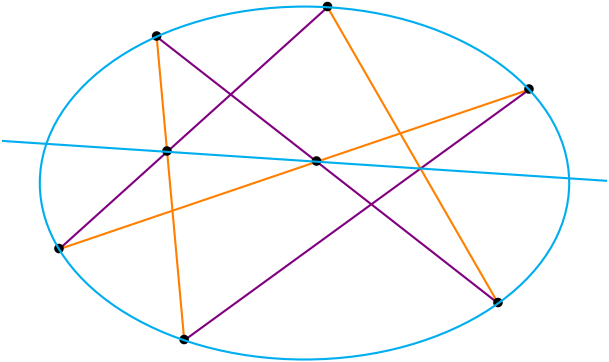
$1+1+1=3$ $\qquad$ $1+1+1=3$

Pinceaux de cubiques $\Longrightarrow$ Lignes et couleurs



$1+1+1=3$ $\quad$ $1+1+1=3$

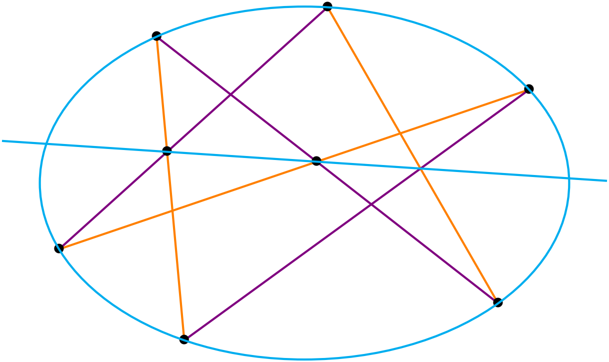
Pinceaux de cubiques $\Longrightarrow$ Lignes et couleurs



$1 + 1 + 1 = 3$

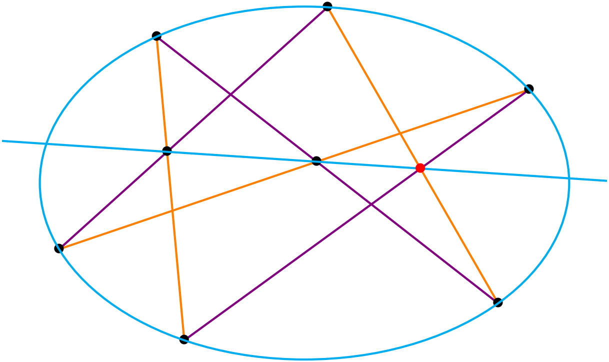
$1 + 1 + 1 = 3$

Pinceaux de cubiques $\Longrightarrow$ Lignes et couleurs



$1+1+1=3$ $\quad$ $2+1=3$ $\quad$ $1+1+1=3$

Pinceaux de cubiques $\Longrightarrow$ Lignes et couleurs



$1 + 1 + 1 = 3$ $\quad$ $2 + 1 = 3$ $\quad$ $1 + 1 + 1 = 3$

En degrés supérieurs...

En degrés supérieurs...

Soit C_1 une courbe plane de degré d_1,

En degrés supérieurs...

Soit C_1 une courbe plane de degré d_1, c'est-à-dire une courbe définie par l'annulation d'un polynôme de degré d_1.

En degrés supérieurs...

Soit C_1 une courbe plane de degré d_1, c'est-à-dire une courbe définie par l'annulation d'un polynôme de degré d_1.

Soit C_2 une courbe plane de degré d_2.

En degrés supérieurs...

Soit C_1 une courbe plane de degré d_1, c'est-à-dire une courbe définie par l'annulation d'un polynôme de degré d_1.

Soit C_2 une courbe plane de degré d_2.

THÉORÈME. *On suppose que $d_1 \geq 2$ et $d_2 \geq 2$ et que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts.*

En degrés supérieurs...

Soit C_1 une courbe plane de degré d_1, c'est-à-dire une courbe définie par l'annulation d'un polynôme de degré d_1.

Soit C_2 une courbe plane de degré d_2.

THÉORÈME. *On suppose que* $d_1 \geq 2$ *et* $d_2 \geq 2$ *et que* C_1 *et* C_2 *s'intersectent en* $\boldsymbol{d_1 d_2}$ *points distincts.*
Si une courbe C *de degré* $d = d_1 + d_2 - 3$ *passe par* $\boldsymbol{d_1 d_2 - 1}$ *des points d'intersection de* C_1 *et* C_2*,*

En degrés supérieurs...

Soit C_1 une courbe plane de degré d_1, c'est-à-dire une courbe définie par l'annulation d'un polynôme de degré d_1.

Soit C_2 une courbe plane de degré d_2.

Théorème. *On suppose que $d_1 \geq 2$ et $d_2 \geq 2$ et que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts.*
Si une courbe C de degré $d = d_1 + d_2 - 3$ passe par $\boldsymbol{d_1 d_2 - 1}$ des points d'intersection de C_1 et C_2, elle passe aussi par le dernier.

En degrés supérieurs $\Longrightarrow$ Pinceaux de cubiques

En degrés supérieurs $\Longrightarrow$ Pinceaux de cubiques

Soit C_1 une courbe de degré $d_1 = 3$.

En degrés supérieurs $\Longrightarrow$ Pinceaux de cubiques

Soit C_1 une courbe de degré $d_1 = 3$.

Soit C_2 une courbe de degré $d_2 = 3$.

En degrés supérieurs $\Longrightarrow$ Pinceaux de cubiques

Soit C_1 une courbe de degré $d_1 = 3$.

Soit C_2 une courbe de degré $d_2 = 3$.

On suppose que C_1 *et* C_2 *s'intersectent en* $\mathbf{3\,.\,3 = 9}$ *points distincts.*

En degrés supérieurs $\Longrightarrow$ Pinceaux de cubiques

Soit C_1 une courbe de degré $d_1 = 3$.

Soit C_2 une courbe de degré $d_2 = 3$.

On suppose que C_1 *et* C_2 *s'intersectent en* $\mathbf{3\,.\,3 = 9}$ *points distincts.*
Si une courbe C *de degré* $d = 3 + 3 - 3 = 3$ *passe par* $\mathbf{3\,.\,3 - 1 = 8}$ *des points d'intersection de* C_1 *et* C_2,

En degrés supérieurs $\Longrightarrow$ Pinceaux de cubiques

Soit C_1 une courbe de degré $d_1 = 3$.

Soit C_2 une courbe de degré $d_2 = 3$.

On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\mathbf{3 \, . \, 3 = 9}$ points distincts.
Si une courbe C de degré $d = 3 + 3 - 3 = 3$ passe par $\mathbf{3 \, . \, 3 - 1 = 8}$ des points d'intersection de C_1 et C_2, elle passe aussi par le dernier.

Décomposition d'équations

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x, y) = 0.$$

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x,y) = 0.$$

OBSERVATION. Si $\mathcal{C}$ est une courbe de degré n, définie par une équation :

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x,y)=0 \quad \text{et} \quad F_2(x,y)=0.$$

Observation. Si $\mathcal{C}$ est une courbe de degré n, définie par une équation :

$$\mathcal{F}(x,y)=0,$$

et si le polynôme $\mathcal{F}(x,y)$ peut s'écrire :

$$(*) \quad \mathcal{F}(x,y)=A_1(x,y)F_1(x,y)+A_2(x,y)F_2(x,y),$$

où $A_1(x,y)$ et $A_2(x,y)$ sont des polynômes,

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x,y) = 0.$$

Observation. Si $\mathcal{C}$ est une courbe de degré n, définie par une équation :

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

et si le polynôme $\mathcal{F}(x,y)$ peut s'écrire :

$$(*) \quad \mathcal{F}(x,y) = A_1(x,y)F_1(x,y) + A_2(x,y)F_2(x,y),$$

où $A_1(x,y)$ et $A_2(x,y)$ sont des polynômes, alors la courbe $\mathcal{C}$ passe par tous les points d'intersection de C_1 et C_2.

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x,y) = 0.$$

Observation. Si $\mathcal{C}$ est une courbe de degré n, définie par une équation :

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

et si le polynôme $\mathcal{F}(x,y)$ peut s'écrire :

$$(*) \quad \mathcal{F}(x,y) = A_1(x,y)F_1(x,y) + A_2(x,y)F_2(x,y),$$

où $A_1(x,y)$ et $A_2(x,y)$ sont des polynômes, alors la courbe $\mathcal{C}$ passe par tous les points d'intersection de C_1 et C_2.

Théorème. *On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts.*

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x,y) = 0.$$

Observation. Si $\mathcal{C}$ est une courbe de degré n, définie par une équation :

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

et si le polynôme $\mathcal{F}(x,y)$ peut s'écrire :

$$(*) \quad \mathcal{F}(x,y) = A_1(x,y)F_1(x,y) + A_2(x,y)F_2(x,y),$$

où $A_1(x,y)$ et $A_2(x,y)$ sont des polynômes, alors la courbe $\mathcal{C}$ passe par tous les points d'intersection de C_1 et C_2.

Théorème. *On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts. Si une courbe $\mathcal{C}$ de degré n, définie par une équation :*

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x,y) = 0.$$

OBSERVATION. Si $\mathcal{C}$ est une courbe de degré n, définie par une équation :

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

et si le polynôme $\mathcal{F}(x,y)$ peut s'écrire :

$$(*) \quad \mathcal{F}(x,y) = A_1(x,y)F_1(x,y) + A_2(x,y)F_2(x,y),$$

où $A_1(x,y)$ et $A_2(x,y)$ sont des polynômes, alors la courbe $\mathcal{C}$ passe par tous les points d'intersection de C_1 et C_2.

THÉORÈME. *On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts. Si une courbe $\mathcal{C}$ de degré n, définie par une équation :*

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

*passe par **tous les points d'intersection** de C_1 et C_2,*

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x, y) = 0.$$

Observation. Si $\mathcal{C}$ est une courbe de degré n, définie par une équation :

$$\mathcal{F}(x, y) = 0,$$

et si le polynôme $\mathcal{F}(x, y)$ peut s'écrire :

$$(*) \quad \mathcal{F}(x, y) = A_1(x, y)F_1(x, y) + A_2(x, y)F_2(x, y),$$

où $A_1(x, y)$ et $A_2(x, y)$ sont des polynômes, alors la courbe $\mathcal{C}$ passe par tous les points d'intersection de C_1 et C_2.

Théorème. *On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts. Si une courbe $\mathcal{C}$ de degré n, définie par une équation :*

$$\mathcal{F}(x, y) = 0,$$

*passe par **tous les points d'intersection** de C_1 et C_2, alors il existe des polynômes $A_1(x, y)$ et $A_2(x, y)$, de degrés $\leq n - d_1$ et $\leq n - d_2$,*

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x,y) = 0.$$

OBSERVATION. Si $\mathcal{C}$ est une courbe de degré n, définie par une équation :

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

et si le polynôme $\mathcal{F}(x,y)$ peut s'écrire :

$$(*) \quad \mathcal{F}(x,y) = A_1(x,y)F_1(x,y) + A_2(x,y)F_2(x,y),$$

où $A_1(x,y)$ et $A_2(x,y)$ sont des polynômes, alors la courbe $\mathcal{C}$ passe par tous les points d'intersection de C_1 et C_2.

THÉORÈME. *On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts. Si une courbe $\mathcal{C}$ de degré n, définie par une équation :*

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

passe par ***tous les points d'intersection*** *de C_1 et C_2, alors il existe des polynômes $A_1(x,y)$ et $A_2(x,y)$, de degrés $\leq n - d_1$ et $\leq n - d_2$, tels que $\mathcal{F}(x,y)$ admette la décomposition $(*)$.*

Commentaire I. Décomposition d'équations $\Longrightarrow$ En degrés supérieurs...

Données de "En degrés supérieurs..." :

C_1, C_2, C passant par $\boldsymbol{d_1 d_2 - 1}$ des $d_1 d_2$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Commentaire I. Décomposition d'équations $\Longrightarrow$ En degrés supérieurs...

Données de "En degrés supérieurs..." :

C_1, C_2, C passant par $\boldsymbol{d_1 d_2 - 1}$ des $d_1 d_2$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Données de "Décomposition d'équations" :

C_1, C_2, $\mathcal{C}$ passant par les $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Commentaire I. Décomposition d'équations $\Longrightarrow$ En degrés supérieurs...

Données de "En degrés supérieurs..." :

C_1, C_2, C passant par $\boldsymbol{d_1 d_2 - 1}$ des $d_1 d_2$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Données de "Décomposition d'équations" :

C_1, C_2, $\mathcal{C}$ passant par les $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Pour établir "En degrés supérieurs...", on commence par appliquer "Décomposition d'équations",

Données de "En degrés supérieurs..." :

C_1, C_2, C passant par $\boldsymbol{d_1 d_2 - 1}$ des $d_1 d_2$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Données de "Décomposition d'équations" :

C_1, C_2, $\mathcal{C}$ passant par les $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Pour établir "En degrés supérieurs...", on commence par appliquer "Décomposition d'équations", en choisissant D une droite suffisamment générale passant par le dernier des $d_1 d_2$ points d'intersection

Données de "En degrés supérieurs..." :

C_1, C_2, C passant par $\boldsymbol{d_1 d_2 - 1}$ des $d_1 d_2$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Données de "Décomposition d'équations" :

C_1, C_2, $\mathcal{C}$ passant par les $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Pour établir "En degrés supérieurs...", on commence par appliquer "Décomposition d'équations", en choisissant D une droite suffisamment générale passant par le dernier des $d_1 d_2$ points d'intersection et en posant :

$$\mathcal{C} := C \cup D;$$

Commentaire I. Décomposition d'équations $\Longrightarrow$ En degrés supérieurs...

Données de "En degrés supérieurs..." :

C_1, C_2, C passant par $\boldsymbol{d_1 d_2 - 1}$ des $d_1 d_2$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Données de "Décomposition d'équations" :

C_1, C_2, $\mathcal{C}$ passant par les $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points d'intersection de C_1 et C_2.

Pour établir "En degrés supérieurs...", on commence par appliquer "Décomposition d'équations", en choisissant D une droite suffisamment générale passant par le dernier des $d_1 d_2$ points d'intersection et en posant :

$$\mathcal{C} := C \cup D;$$

$$\text{degré}(\mathcal{C}) = \text{degré}(C) + 1.$$

Commentaire II. Géométrie et algorithmes

Commentaire II. Géométrie et algorithmes

On sait aujourd'hui qu'il existe une "procédure de décision algorithmique" pour la validité des énoncés de géométrie mettant en jeu des courbes algébriques planes de degrés déterminés, leurs points d'intersection, etc.

Commentaire II. Géométrie et algorithmes

On sait aujourd'hui qu'il existe une "procédure de décision algorithmique" pour la validité des énoncés de géométrie mettant en jeu des courbes algébriques planes de degrés déterminés, leurs points d'intersection, etc.

En d'autres termes, en principe au moins, on peut programmer un ordinateur pour analyser automatiquement un tel énoncé, de sorte qu'il en fournisse une démonstration, s'il est vrai, ou bien un contre-exemple sinon.

Commentaire II. Géométrie et algorithmes

On sait aujourd'hui qu'il existe une "procédure de décision algorithmique" pour la validité des énoncés de géométrie mettant en jeu des courbes algébriques planes de degrés déterminés, leurs points d'intersection, etc.

En d'autres termes, en principe au moins, on peut programmer un ordinateur pour analyser automatiquement un tel énoncé, de sorte qu'il en fournisse une démonstration, s'il est vrai, ou bien un contre-exemple sinon.

L'énoncé du théorème "En degrés supérieurs..." qui affirme la validité d'une infinité de tels énoncés (dépendant du choix des degrés d_1 et d_2) ne rentre *pas* dans le cadre d'une telle procédure algorithmique.

Commentaire III. Géométrie algébrique et cohomologie

Commentaire III. Géométrie algébrique et cohomologie

Il existe toutefois des techniques systématiques puissantes pour aborder des questions de géométrie algébrique comme la “Décomposition d’équations”.

Il existe toutefois des techniques systématiques puissantes pour aborder des questions de géométrie algébrique comme la “Décomposition d’équations”.

Aujourd’hui le théorème sur la “Décomposition d’équations” est l’une des multiples conséquences de l’énoncé suivant :

Pour tout entier naturel d, $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) = 0$.

Commentaire III. Géométrie algébrique et cohomologie

Il existe toutefois des techniques systématiques puissantes pour aborder des questions de géométrie algébrique comme la “Décomposition d’équations”.

Aujourd’hui le théorème sur la “Décomposition d’équations” est l’une des multiples conséquences de l’énoncé suivant :

$$\text{Pour tout entier naturel } d,\ H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) = 0.$$

Cohomology groups in a nutshell/les groupes de cohomologie ‘pour les nuls’

Commentaire III. Géométrie algébrique et cohomologie

Il existe toutefois des techniques systématiques puissantes pour aborder des questions de géométrie algébrique comme la "Décomposition d'équations".

Aujourd'hui le théorème sur la "Décomposition d'équations" est l'une des multiples conséquences de l'énoncé suivant :

Pour tout entier naturel d, $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) = 0$.

Cohomology groups in a nutshell/les groupes de cohomologie 'pour les nuls'

- $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) = \{$polynômes $F(x, y)$ en deux variables de degré $\leq d\}$;

Commentaire III. Géométrie algébrique et cohomologie

Il existe toutefois des techniques systématiques puissantes pour aborder des questions de géométrie algébrique comme la “Décomposition d’équations”.

Aujourd’hui le théorème sur la “Décomposition d’équations” est l’une des multiples conséquences de l’énoncé suivant :

Pour tout entier naturel d, $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) = 0$.

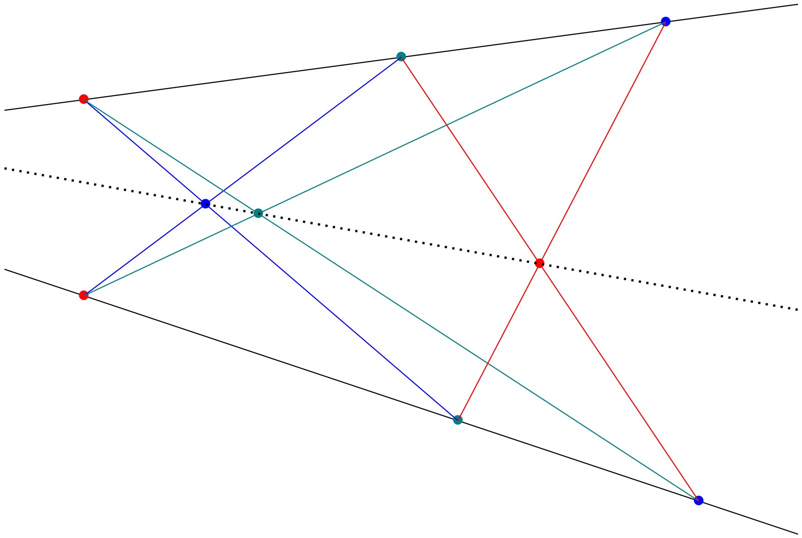
Cohomology groups in a nutshell/les groupes de cohomologie ‘pour les nuls’

- $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) = \{$polynômes $F(x, y)$ en deux variables de degré $\leq d\}$;
- $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)) = \{$“obstructions” à la construction de tels polynômes$\}$.

II. Jadis et naguère

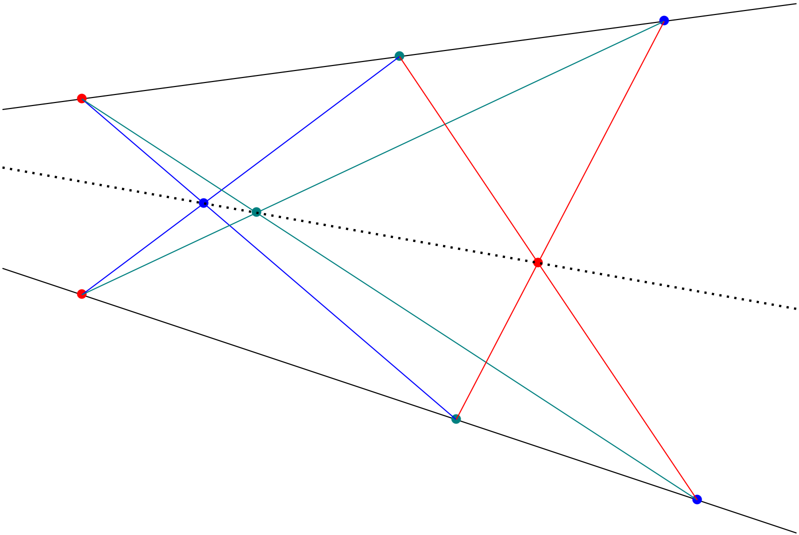
Des lignes et des couleurs I

Des lignes et des couleurs I



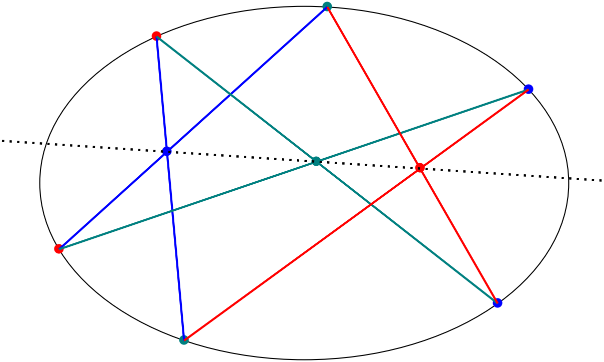
Pappus, Alexandrie, ~ 330

[Euclide, Alexandrie, ~ -300]

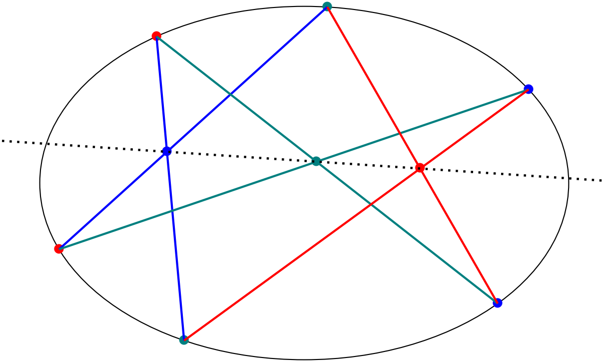


Des lignes et des couleurs II

Des lignes et des couleurs II

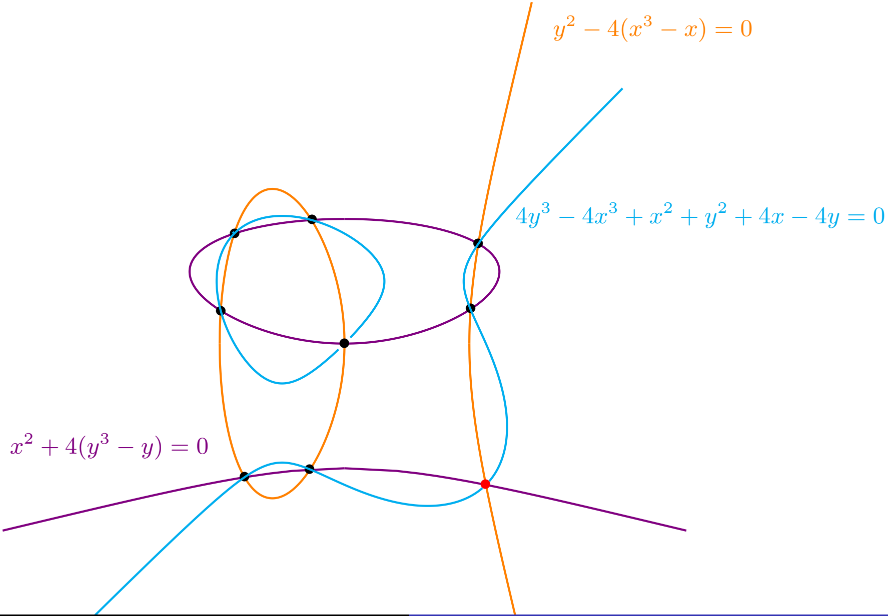


Pascal, Paris, 1639/1640



Pinceaux de cubiques

Pinceaux de cubiques

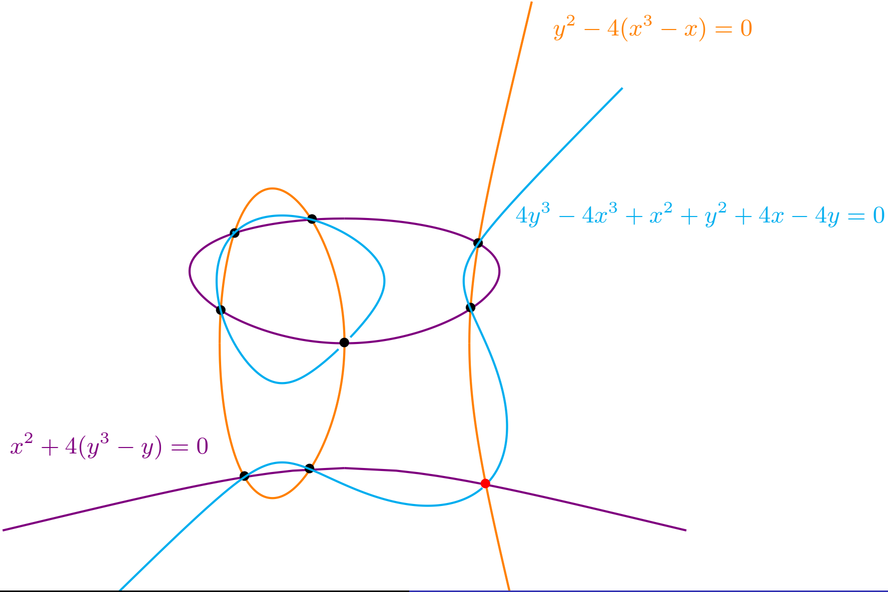


Chasles, Paris, $\leq$ 1837

[MacLaurin, Aberdeen, $\leq$ 1720]

Chasles, Paris, ≤ 1837

[MacLaurin, Aberdeen, ≤ 1720]



En degrés supérieurs...

.

En degrés supérieurs...

Soit C_1 une courbe plane de degré d_1, c'est-à-dire une courbe définie par l'annulation d'un polynôme de degré d_1.

Soit C_2 une courbe plane de degré d_2.

En degrés supérieurs...

.

Soit C_1 une courbe plane de degré d_1, c'est-à-dire une courbe définie par l'annulation d'un polynôme de degré d_1.

Soit C_2 une courbe plane de degré d_2.

THÉORÈME. *On suppose que $d_1 \geq 2$ et $d_2 \geq 2$ et que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts.*
Si une courbe C de degré $d = d_1 + d_2 - 3$ passe par $\boldsymbol{d_1 d_2 - 1}$ des points d'intersection de C_1 et C_2, elle passe aussi par le dernier.

Cayley, Oxford, 1842

[Chasles, 1837]

Soit C_1 une courbe plane de degré d_1, c'est-à-dire une courbe définie par l'annulation d'un polynôme de degré d_1.

Soit C_2 une courbe plane de degré d_2.

THÉORÈME. *On suppose que $d_1 \geq 2$ et $d_2 \geq 2$ et que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts.*
Si une courbe C de degré $d = d_1 + d_2 - 3$ passe par $\boldsymbol{d_1 d_2 - 1}$ des points d'intersection de C_1 et C_2, elle passe aussi par le dernier.

Décomposition d'équations

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x, y) = 0.$$

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x, y) = 0.$$

THÉORÈME. *On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts.*

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x,y) = 0.$$

THÉORÈME. *On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\boldsymbol{d_1 d_2}$ points distincts. Si une courbe $\mathcal{C}$ de degré n, définie par une équation :*

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

*passe par **tous les points d'intersection** de C_1 et C_2,*

Décomposition d'équations

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x,y) = 0.$$

Théorème. *On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\mathbf{d_1 d_2}$ points distincts. Si une courbe $\mathcal{C}$ de degré n, définie par une équation :*

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

passe par ***tous les points d'intersection*** *de C_1 et C_2, alors il existe des polynômes $A_1(x,y)$ et $A_2(x,y)$, de degrés $\leq n - d_1$ et $\leq n - d_2$, tels que $\mathcal{F}(x,y)$ admette la décomposition*

$$\mathcal{F}(x,y) = A_1(x,y)F_1(x,y) + A_2(x,y)F_2(x,y).$$

Le théorème de Noether, Göttingen/Heidelberg, 1869/1872

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x,y) = 0.$$

Théorème. *On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\mathbf{d_1 d_2}$ points distincts. Si une courbe $\mathcal{C}$ de degré n, définie par une équation :*

$$\mathcal{F}(x,y) = 0,$$

*passe par **tous les points d'intersection** de C_1 et C_2, alors il existe des polynômes $A_1(x,y)$ et $A_2(x,y)$, de degrés $\leq n - d_1$ et $\leq n - d_2$, tels que $\mathcal{F}(x,y)$ admette la décomposition*

$$\mathcal{F}(x,y) = A_1(x,y)F_1(x,y) + A_2(x,y)F_2(x,y).$$

Le théorème $A\varphi + B\psi$, ou $AF + BG$, de Max Noether

Soient C_1 et C_2 des courbes de degrés d_1 et d_2, définies par les équations polynomiales :

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(x, y) = 0.$$

Théorème. *On suppose que C_1 et C_2 s'intersectent en $\mathbf{d_1 d_2}$ points distincts. Si une courbe $\mathcal{C}$ de degré n, définie par une équation :*

$$\mathcal{F}(x, y) = 0,$$

passe par ***tous les points d'intersection*** *de C_1 et C_2, alors il existe des polynômes $A_1(x, y)$ et $A_2(x, y)$, de degrés $\leq n - d_1$ et $\leq n - d_2$, tels que $\mathcal{F}(x, y)$ admette la décomposition*

$$\mathcal{F}(x, y) = A_1(x, y) F_1(x, y) + A_2(x, y) F_2(x, y).$$

Décomposition d'équations $\Longrightarrow$ En degrés supérieurs...

Théorème de Noether $\Longrightarrow$ Théorème de Cayley

Théorème de Noether $\Longrightarrow$ Théorème de Cayley Bacharach, Erlangen, 1881-1885

Théorème de Noether $\Longrightarrow$ Théorème de Cayley-Bacharach

Noether, Bacharach $\sim 1870 - 1885$

Théorème de Noether $\Longrightarrow$ Théorème de Cayley-Bacharach

Noether, Bacharach $\sim 1870 - 1885$

Noether et Bacharach s'attachent à développer la géométrie algébrique, avec des standards de rigueur élevés, s'appuyant sur des raisonnements algébriques, plutôt que sur des principes géométriques, intuitivement séduisants mais dont les limites de validité restent obscures.

Théorème de Noether $\Longrightarrow$ Théorème de Cayley-Bacharach

Noether, Bacharach $\sim$ 1870 – 1885

Noether et Bacharach s'attachent à développer la géométrie algébrique, avec des standards de rigueur élevés, s'appuyant sur des raisonnements algébriques, plutôt que sur des principes géométriques, intuitivement séduisants mais dont les limites de validité restent obscures.

- Énoncés valables *sans cas exceptionnels* :
  "... sind von dem Cayley'schen Satz *noch keine Criterien für Ausnahmfälle* bekannt,..."

Théorème de Noether $\Longrightarrow$ Théorème de Cayley-Bacharach

Noether, Bacharach $\sim$ 1870 – 1885

Noether et Bacharach s'attachent à développer la géométrie algébrique, avec des standards de rigueur élevés, s'appuyant sur des raisonnements algébriques, plutôt que sur des principes géométriques, intuitivement séduisants mais dont les limites de validité restent obscures.

- Énoncés valables *sans cas exceptionnels* :
  "... sind von dem Cayley'schen Satz *noch keine Criterien für Ausnahmfälle* bekannt,..."

- *Combler les lacunes* des démonstrations :
  "In einer Reihe von Arbeiten findet sich eine Lücke, die das Folgende auszufüllen bestimmt ist..."

Théorème de Noether $\Longrightarrow$ Théorème de Cayley-Bacharach

Noether, Bacharach $\sim 1870 - 1885$

Noether et Bacharach s'attachent à développer la géométrie algébrique, avec des standards de rigueur élevés, s'appuyant sur des raisonnements algébriques, plutôt que sur des principes géométriques, intuitivement séduisants mais dont les limites de validité restent obscures.

- Énoncés valables *sans cas exceptionnels* :
  "... sind von dem Cayley'schen Satz *noch keine Criterien für Ausnahmfälle* bekannt,..."

- *Combler les lacunes* des démonstrations :
  "In einer Reihe von Arbeiten findet sich eine Lücke, die das Folgende auszufüllen bestimmt ist..."

- Circonlocutions :

Théorème de Noether $\Longrightarrow$ Théorème de Cayley-Bacharach

Noether, Bacharach $\sim$ 1870 – 1885

Noether et Bacharach s'attachent à développer la géométrie algébrique, avec des standards de rigueur élevés, s'appuyant sur des raisonnements algébriques, plutôt que sur des principes géométriques, intuitivement séduisants mais dont les limites de validité restent obscures.

- Énoncés valables *sans cas exceptionnels* :
  "... sind von dem Cayley'schen Satz *noch keine Criterien für Ausnahmfälle* bekannt,..."

- *Combler les lacunes* des démonstrations :
  "In einer Reihe von Arbeiten findet sich eine Lücke, die das Folgende auszufüllen bestimmt ist..."

- Circonlocutions : *e.g.* mathématiques *sans arrière-pensées* ;
  "Dagegen kann man ohne Bedenken dem Cayley'schen Satze die folgende Fassung geben : ..."

Géométrie algébrique et cohomologie

Géométrie algébrique et cohomologie

- H. Cartan, Serre, Paris ≥ 1952

Géométrie algébrique et cohomologie

- H. Cartan, Serre, Paris ≥ 1952
- Kodaira, Spencer, Borel, Hirzebruch, Princeton ≥ 1952

Géométrie algébrique et cohomologie

- H. Cartan, Serre, Paris ≥ 1952
- Kodaira, Spencer, Borel, Hirzebruch, Princeton ≥ 1952
- Grothendieck, Bures-sur-Yvette ≥ 1956

Géométrie algébrique et cohomologie

- H. Cartan, Serre, Paris $\geq$ 1952
- Kodaira, Spencer, Borel, Hirzebruch, Princeton $\geq$ 1952
- Grothendieck, Bures-sur-Yvette $\geq$ 1956
- ....

Géométrie algébrique et cohomologie

- H. Cartan, Serre, Paris ≥ 1952
- Kodaira, Spencer, Borel, Hirzebruch, Princeton ≥ 1952
- Grothendieck, Bures-sur-Yvette ≥ 1956
- ....

Cohomology groups in a nutshell (bis) :

Géométrie algébrique et cohomologie

- H. Cartan, Serre, Paris ≥ 1952
- Kodaira, Spencer, Borel, Hirzebruch, Princeton ≥ 1952
- Grothendieck, Bures-sur-Yvette ≥ 1956
- ....

Cohomology groups in a nutshell (bis) :
À un espace X (par exemple une courbe algébrique, ou le plan projectif $\mathbb{P}^2$) et un faisceau $\mathcal{F}$ (:= "fonctions d'un certain type", par exemple polynomiales) sur X, on associe des groupes de cohomologie :

$$H^i(X, \mathcal{F}), \quad i \geq 0.$$

Géométrie algébrique et cohomologie

- H. Cartan, Serre, Paris ≥ 1952
- Kodaira, Spencer, Borel, Hirzebruch, Princeton ≥ 1952
- Grothendieck, Bures-sur-Yvette ≥ 1956
- ....

Cohomology groups in a nutshell (bis) :
À un espace X (par exemple une courbe algébrique, ou le plan projectif $\mathbb{P}^2$) et un faisceau $\mathcal{F}$ (:= “fonctions d'un certain type”, par exemple polynomiales) sur X, on associe des groupes de cohomologie :

$$H^i(X, \mathcal{F}), \quad i \geq 0.$$

- $H^0(X, \mathcal{F})$ = objets mathématiques classiques ;

Géométrie algébrique et cohomologie

- H. Cartan, Serre, Paris ≥ 1952
- Kodaira, Spencer, Borel, Hirzebruch, Princeton ≥ 1952
- Grothendieck, Bures-sur-Yvette ≥ 1956
- ....

Cohomology groups in a nutshell (bis) :
À un espace X (par exemple une courbe algébrique, ou le plan projectif $\mathbb{P}^2$) et un faisceau $\mathcal{F}$ (:= “fonctions d'un certain type”, par exemple polynomiales) sur X, on associe des groupes de cohomologie :

$$H^i(X, \mathcal{F}), \quad i \geq 0.$$

- $H^0(X, \mathcal{F})$ = objets mathématiques classiques ;
- $H^i(X, \mathcal{F})$, $i \geq 1$ = obstructions itérées/supérieures à construire ces objets ;

Géométrie algébrique et cohomologie

- H. Cartan, Serre, Paris ≥ 1952
- Kodaira, Spencer, Borel, Hirzebruch, Princeton ≥ 1952
- Grothendieck, Bures-sur-Yvette ≥ 1956
- ....

Cohomology groups in a nutshell (bis) :
À un espace X (par exemple une courbe algébrique, ou le plan projectif $\mathbb{P}^2$) et un faisceau $\mathcal{F}$ (:= "fonctions d'un certain type", par exemple polynomiales) sur X, on associe des groupes de cohomologie :

$$H^i(X, \mathcal{F}), \quad i \geq 0.$$

- $H^0(X, \mathcal{F})$ = objets mathématiques classiques ;
- $H^i(X, \mathcal{F})$, $i \geq 1$ = obstructions itérées/supérieures à construire ces objets ;
- souvent on sait que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \gg 1$, et on démontre par récurrence descendante sur $i \geq 1$ des propriétés d'annulation ou de finitude sur $H^i(X, \mathcal{F})$, avant d'en déduire des énoncés "concrets" sur $H^0(X, \mathcal{F})$.

Une histoire inachevée

Une histoire inachevée

BULLETIN (New Series) OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 33, Number 3, July 1996

CAYLEY-BACHARACH THEOREMS AND CONJECTURES

DAVID EISENBUD, MARK GREEN, AND JOE HARRIS

Abstract. A theorem of Pappus of Alexandria, proved in the fourth century A.D., began a long development in algebraic geometry. In its changing expressions one can see reflected the changing concerns of the field, from synthetic geometry to projective plane curves to Riemann surfaces to the modern development of schemes and duality. We survey this development historically and use it to motivate a brief treatment of a part of duality theory. We then explain one of the modern developments arising from it, a series of conjectures about the linear conditions imposed by a set of points in projective space on the forms that vanish on them. We give a proof of the conjectures in a new special case.

Contents

Introduction

Suppose that Γ is a set of γ distinct points in $\mathbb{R}^n$ (or $\mathbb{C}^n$). In fields ranging from applied mathematics (splines and interpolation) to transcendental numbers, and of course also in algebraic geometry, it is interesting to ask about the polynomial functions that vanish on Γ. If we substitute the coordinates of a point p of Γ for the variables, then the condition that a polynomial f vanishes at p becomes a nontrivial linear condition on the coefficients of f. Thus the vanishing of f on Γ is ensured by γ linear conditions on the coefficients of f. These γ conditions are linearly independent when applied to the space of $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ of all polynomials

Received by the editors March 24, 1995, and, in revised form, November 3, 1995.
1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14N05, 14H05, 14-02; Secondary 13-03, 13H10.

III. Mathématiques simples et hybrides

Plus grande généralité, plus grande simplicité ?

Plus grande généralité, plus grande simplicité ?

Asymétrie entre découvrir/inventer de nouvelles mathématiques et comprendre des mathématiques déjà connues.

Plus grande généralité, plus grande simplicité ?

Asymétrie entre découvrir/inventer de nouvelles mathématiques et comprendre des mathématiques déjà connues.

Ambivalence de la “force de l’évidence” :

Plus grande généralité, plus grande simplicité ?

Asymétrie entre découvrir/inventer de nouvelles mathématiques et comprendre des mathématiques déjà connues.

Ambivalence de la “force de l’évidence” :

- + plaisir intellectuel/éblouissement de la découverte et de la certitude mathématique ;

Plus grande généralité, plus grande simplicité ?

Asymétrie entre découvrir/inventer de nouvelles mathématiques et comprendre des mathématiques déjà connues.

Ambivalence de la “force de l’évidence” :

- + plaisir intellectuel/éblouissement de la découverte et de la certitude mathématique ;
- – *Les méthodes des géomètres sont des espèces de chaînes qui les lient et les empêchent de s’écarter* (Montesquieu).

Plus grande généralité, plus grande simplicité ?

Asymétrie entre découvrir/inventer de nouvelles mathématiques et comprendre des mathématiques déjà connues.

Ambivalence de la "force de l'évidence" :

- + plaisir intellectuel/éblouissement de la découverte et de la certitude mathématique ;
- − *Les méthodes des géomètres sont des espèces de chaînes qui les lient et les empêchent de s'écarter* (Montesquieu).

Reliées à un phénomène psychologique fondamental : en mathématiques, après que l'on a compris quelque chose, il est quasiment impossible de revenir à l'état d'incompréhension antérieur.

Plus grande généralité, plus grande simplicité ?

Asymétrie entre découvrir/inventer de nouvelles mathématiques et comprendre des mathématiques déjà connues.

Ambivalence de la “force de l'évidence” :

- + plaisir intellectuel/éblouissement de la découverte et de la certitude mathématique ;
- − *Les méthodes des géomètres sont des espèces de chaînes qui les lient et les empêchent de s'écarter* (Montesquieu).

Reliées à un phénomène psychologique fondamental : en mathématiques, après que l'on a compris quelque chose, il est quasiment impossible de revenir à l'état d'incompréhension antérieur.

Il en va de même de concepts simplificateurs/clarificateurs par leur abstraction, dont le caractère révolutionnaire s'évanouit *a posteriori*.

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

Nous sommes tous mathématiciens !

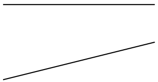
Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

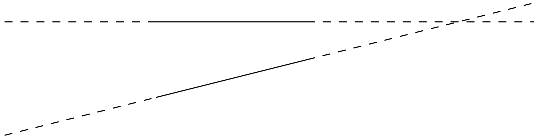
- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

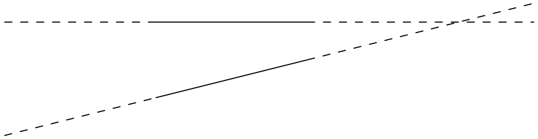
- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.

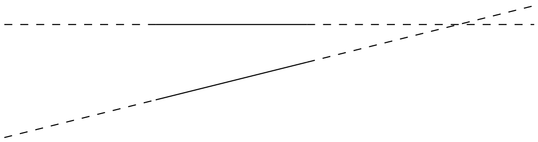


- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



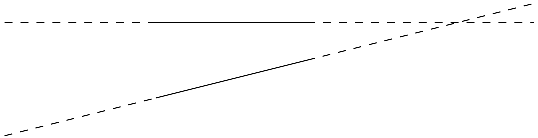
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e =$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites “s'étendant indéfiniment” : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



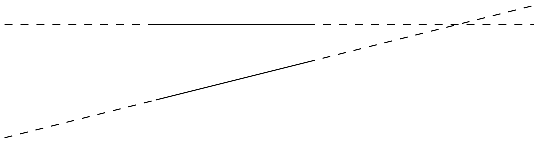
- Nombres “réels”, définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



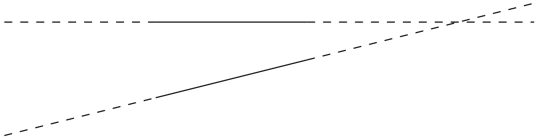
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,7$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



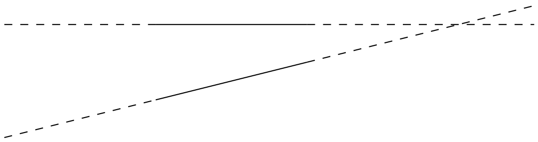
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,71$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



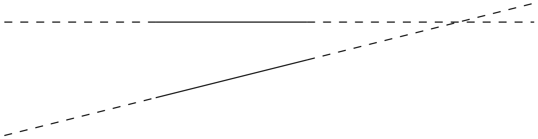
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,718$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



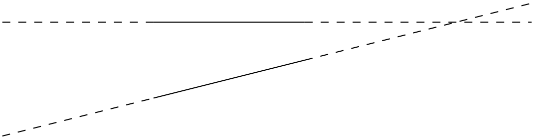
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,7182$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



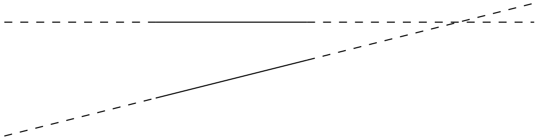
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,71828$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



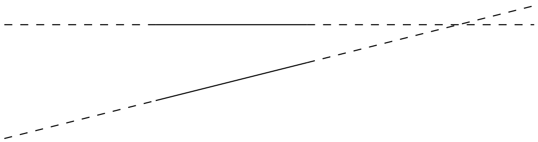
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,718281$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



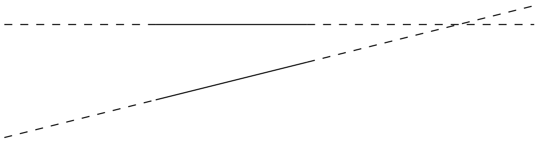
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,7182818$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



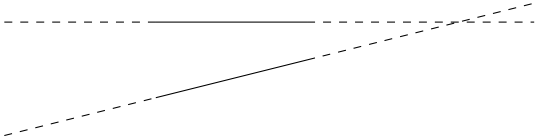
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,71828182$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



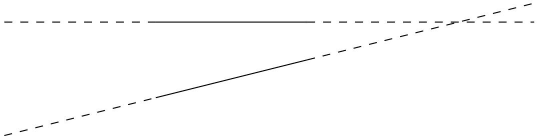
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,718281828$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



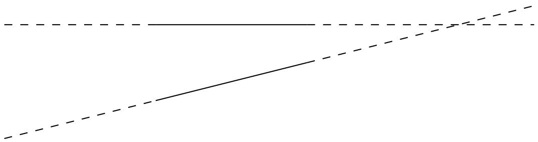
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,7182818284$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



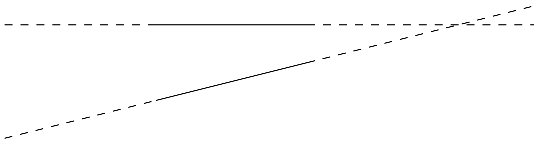
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,71828182845$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



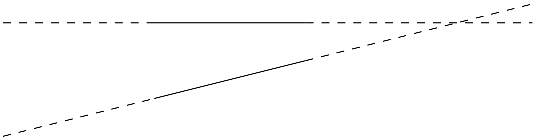
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,718281828459$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



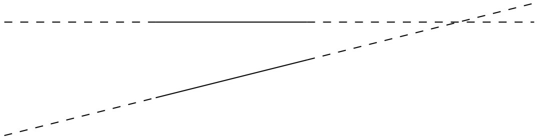
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,7182818284590$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



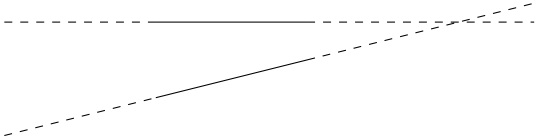
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,71828182845904$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



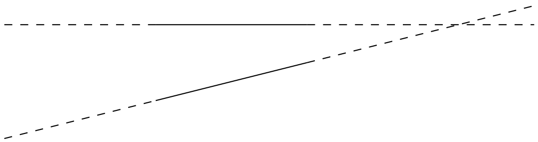
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,718281828459045$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



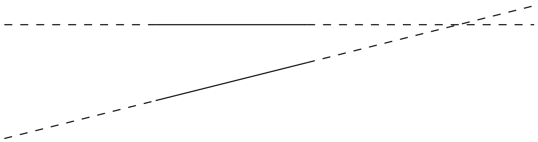
- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous avons tous l'expérience de cela :

- Droites "s'étendant indéfiniment" : géométrie grecque, deux droites non parallèles ont un unique point d'intersection.



- Nombres "réels", définis par des développements décimaux illimités :

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

Résout les paradoxes du type "Achille et la Tortue" : une somme infinie de nombres positifs peut être finie !

Nous sommes tous mathématiciens !

Nous sommes tous mathématiciens !

Les idées mathématiques les plus abstraites deviennent sur le long terme largement partagées : leurs applications matérielles les “banalisent”.

Nous sommes tous mathématiciens !

Les idées mathématiques les plus abstraites deviennent sur le long terme largement partagées : leurs applications matérielles les “banalisent”.

Un exemple “moderne” :

Nous sommes tous mathématiciens !

Les idées mathématiques les plus abstraites deviennent sur le long terme largement partagées : leurs applications matérielles les “banalisent”.

Un exemple “moderne” :

- $\gtrsim$ 1840. Développement de la rigueur en analyse et en géométrie :
  Bolzano, Weierstrass, Dedekind...

Nous sommes tous mathématiciens !

Les idées mathématiques les plus abstraites deviennent sur le long terme largement partagées : leurs applications matérielles les “banalisent”.

Un exemple “moderne” :

- $\gtrsim$ 1840. Développement de la rigueur en analyse et en géométrie :
  Bolzano, Weierstrass, Dedekind...
- $\gtrsim$ 1875. Théorie des ensembles, logique mathématique, fondements :
  Cantor, Frege, Peano, Hilbert, Russell...

Nous sommes tous mathématiciens !

Les idées mathématiques les plus abstraites deviennent sur le long terme largement partagées : leurs applications matérielles les “banalisent”.

Un exemple “moderne” :

- $\gtrsim$ 1840. Développement de la rigueur en analyse et en géométrie :
  Bolzano, Weierstrass, Dedekind...
- $\gtrsim$ 1875. Théorie des ensembles, logique mathématique, fondements :
  Cantor, Frege, Peano, Hilbert, Russell...
- $\gtrsim$ 1930. Incomplétude, récursivité, calculabilité :
  Hilbert, Gödel, von Neumann, Herbrand, Church, Turing...

Nous sommes tous mathématiciens !

Les idées mathématiques les plus abstraites deviennent sur le long terme largement partagées : leurs applications matérielles les "banalisent".

Un exemple "moderne" :

- $\gtrsim$ 1840. Développement de la rigueur en analyse et en géométrie :
  Bolzano, Weierstrass, Dedekind...
- $\gtrsim$ 1875. Théorie des ensembles, logique mathématique, fondements :
  Cantor, Frege, Peano, Hilbert, Russell...
- $\gtrsim$ 1930. Incomplétude, récursivité, calculabilité :
  Hilbert, Gödel, von Neumann, Herbrand, Church, Turing...
- $\gtrsim$ 1940. Conception et construction des ordinateurs :
  von Neumann, Turing...

Nous sommes tous mathématiciens !

Les idées mathématiques les plus abstraites deviennent sur le long terme largement partagées : leurs applications matérielles les “banalisent”.

Un exemple “moderne” :

- $\gtrsim$ 1840. Développement de la rigueur en analyse et en géométrie :
  Bolzano, Weierstrass, Dedekind...
- $\gtrsim$ 1875. Théorie des ensembles, logique mathématique, fondements :
  Cantor, Frege, Peano, Hilbert, Russell...
- $\gtrsim$ 1930. Incomplétude, récursivité, calculabilité :
  Hilbert, Gödel, von Neumann, Herbrand, Church, Turing...
- $\gtrsim$ 1940. Conception et construction des ordinateurs :
  von Neumann, Turing...

Aujourd’hui, le théorème d’incomplétude de Gödel, est — dans sa version informatique affirmant l’impossibilité de programmer un “debugger” universel — de l’ordre de l’évidence pour des millions de programmeurs.

Mathématiques et botanique I : Les mathématiques comme créations hybrides

Mathématiques et botanique I : Les mathématiques comme créations hybrides

Géométrie analytique (Descartes, Fermat) : combinaison de la géométrie (grecque) et de calculs algébriques (arabes, persans, voire indiens)

Mathématiques et botanique I : Les mathématiques comme créations hybrides

Géométrie analytique (Descartes, Fermat) : combinaison de la géométrie (grecque) et de calculs algébriques (arabes, persans, voire indiens)

Calcul différentiel et intégral (Newton, Leibniz) : combinaison de la géométrie analytique et d'un aspect dynamique motivé par la physique et l'astronomie.

Mathématiques et botanique II. V.I. Arnold et les champignons

Mathématiques et botanique II. V.I. Arnold et les champignons

Les théorèmes comme partie “émergée” d’un immense iceberg mathématique...

Mathématiques et botanique II. V.I. Arnold et les champignons

Les théorèmes comme partie “émergée” d'un immense iceberg mathématique...

Image plus fidèle au “ressenti” de beaucoup de mathématiciens, due à V.I. Arnold :

> *Quand vous cueillez des champignons, vous ne voyez que le champignon même. Mais si vous êtes mycologue, vous savez que le vrai champignon est dans la terre. Il y a quelque chose d'énorme là-dessous, et on n'en voit que le fruit, le corps qu'on mange. En mathématiques, la partie supérieure du champignon correspond aux théorèmes qu'on voit. Mais on ne voit pas les choses en-dessous, à savoir les problèmes, conjectures, erreurs, idées, etc.*

Mathématiques et botanique II. V.I. Arnold et les champignons

Les théorèmes comme partie “émergée” d’un immense iceberg mathématique...

Image plus fidèle au “ressenti” de beaucoup de mathématiciens, due à V.I. Arnold :

> *Quand vous cueillez des champignons, vous ne voyez que le champignon même. Mais si vous êtes mycologue, vous savez que le vrai champignon est dans la terre. Il y a quelque chose d’énorme là-dessous, et on n’en voit que le fruit, le corps qu’on mange. En mathématiques, la partie supérieure du champignon correspond aux théorèmes qu’on voit. Mais on ne voit pas les choses en-dessous, à savoir les problèmes, conjectures, erreurs, idées, etc.*

Théorèmes, mathématiques rationnelles et lumineuses

$\longleftrightarrow$ Partie aérienne des champignons

Mathématiques et botanique II. V.I. Arnold et les champignons

Les théorèmes comme partie "émergée" d'un immense iceberg mathématique...

Image plus fidèle au "ressenti" de beaucoup de mathématiciens, due à V.I. Arnold :

> *Quand vous cueillez des champignons, vous ne voyez que le champignon même. Mais si vous êtes mycologue, vous savez que le vrai champignon est dans la terre. Il y a quelque chose d'énorme là-dessous, et on n'en voit que le fruit, le corps qu'on mange. En mathématiques, la partie supérieure du champignon correspond aux théorèmes qu'on voit. Mais on ne voit pas les choses en-dessous, à savoir les problèmes, conjectures, erreurs, idées, etc.*

Théorèmes, mathématiques rationnelles et lumineuses
$\longleftrightarrow$ Partie aérienne des champignons

Mathématiques intuitives, conjecturales, en devenir
$\longleftrightarrow$ Mycelium, appareil végétatif souterrain

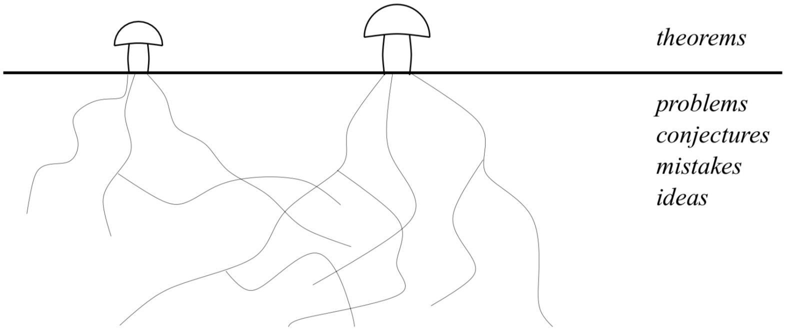


Fig. 1. The mathematical mushroom

Tirée de V. I. Arnold, *From Hilbert's Superposition Problem to Dynamical Systems*, 1997.

Mathématiques et botanique III

Mathématiques et botanique III : les théoriciens des nombres, jadis et naguère

Mathématiques et botanique III : les théoriciens des nombres, jadis et naguère

> Je crois donc que l'Analyse la plus abstraite est en grande partie une science d'observation, j'assimile absolument le complexe des notions connues et à connaître dans ce domaine de l'analyse, à celles des sciences naturelles, les notions de l'analyse ayant leur individualité propre, leur figure si je puis dire, et leurs corrélations multipliées, au même degré que les animaux et les plantes.
>
> Ch. Hermite, lettre à L. Königsberger du 2 mars 1876.

Mathématiques et botanique III : les théoriciens des nombres, jadis et naguère

Je crois donc que l'Analyse la plus abstraite est en grande partie une science d'observation, j'assimile absolument le complexe des notions connues et à connaître dans ce domaine de l'analyse, à celles des sciences naturelles, les notions de l'analyse ayant leur individualité propre, leur figure si je puis dire, et leurs corrélations multipliées, au même degré que les animaux et les plantes.

Ch. Hermite, lettre à L. Königsberger du 2 mars 1876.

"Vous devriez vous arranger un petit jardin mathématique dans lequel vous pourriez vous promener."

E. Hecke à son étudiant en thèse W. Maak, $\sim$ 1935.

Mathématiques et botanique III : les théoriciens des nombres, jadis et naguère

Je crois donc que l'Analyse la plus abstraite est en grande partie une science d'observation, j'assimile absolument le complexe des notions connues et à connaître dans ce domaine de l'analyse, à celles des sciences naturelles, les notions de l'analyse ayant leur individualité propre, leur figure si je puis dire, et leurs corrélations multipliées, au même degré que les animaux et les plantes.

> Ch. Hermite, lettre à L. Königsberger du 2 mars 1876.

"Vous devriez vous arranger un petit jardin mathématique dans lequel vous pourriez vous promener."

> E. Hecke à son étudiant en thèse W. Maak, $\sim$ 1935.

Nous sommes dans une forêt dont les arbres ne tomberont pas avec quelques coups de hachette timides. Nous devons nous munir de la hache à double tranchant et de la scie de travers, et espérer que nos muscles les égalent.

> R. P. Langlands, On the zeta-functions of some simple Shimura varieties, 1979.

Merci

Merci

Nous remercions Richard Kruel, Isabelle et Paul Mordant, Loïc Rivalain et Damien Simon pour leur aide et leurs conseils lors de la préparation de cet exposé.

Cette présentation, accompagnée de références complémentaires, sera disponible sur le site :
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/fr/perso/thomas-mordant/`

Références

Quelques références générales

Voici deux ouvrages permettant de prolonger l'exploration des mathématiques dans l'esprit de cet exposé.

- Un "panier de champignons" :

  M. Aigner, G. Ziegler, *Proofs from* THE BOOK, 6th edition, Springer, 2018.
- Une présentation du "mycelium", par l'un des acteurs majeurs des mathématiques du vingtième siècle :

  S. MacLane, *Mathematics, form and function*, Springer, 1986.

Nous les avons choisis pour des raisons de goût personnel, et pour l'effort exceptionnel qui y est fait pour présenter de manière accessible des concepts et des résultats souvent réservés à un petit nombre d'experts.

Sur l'histoire de la géométrie algébrique, jadis et naguère... I

Le théorème de Chasles est énoncé par Chasles dans une note en bas de page, lors de la discussion des travaux de MacLaurin dans son grand ouvrage sur la géométrie (algébrique) et son histoire (voir page 149) :

- M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, 1837.

  `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65439706.texteImage`

Les cubiques générales sont peu représentées sur des figures imprimées. Voici le peu d'exemples que nous avons réussi à identifier. L'ouvrage de Plücker contient l'unique figure imprimée de pinceaux de cubiques que nous connaissions.

- I. Newton, J. Stirling, *Isaaci Newtoni enumeratio linearum tertii ordinis ; sequitur illustratio ejusdem tractatus auctore Jacobo Stirling*, réédition, Paris, 1797.

  `https://ia801608.us.archive.org/2/items/isaacinewtonien00newtgoog`

  `/isaacinewtonien00newtgoog.pdf`

- C. MacLaurin, *Geometria Organica sive Descriptio Linearum Curvarum universalis*, Londres, 1720.

  `https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-52719`

Sur l'histoire de la géométrie algébrique, jadis et naguère... II

- C. MacLaurin, *De Linearum Geometricarum Proprietatibus generalibus Tractatus*, Londres, 1748.

  `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bd6t5737833q.r=Colin MacLaurin?rk=85837;2`

- J. Plücker, *System der analytischen Geometrie auf neue Betrachtungsweisen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend*, Berlin, 1835.

  `https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015035529539`

Le théorème de Cayley–Bacharach apparaît, dans une version "douteuse", dans :

- A. Cayley, *On the intersection of curves*, Cambridge Math. J., vol. III (1843), 211–213.

Un énoncé "corrigé" et sa démonstration forment l'objet de l'article :

- I. Bacharach, *Ueber den Cayley'schen Schnittpunktsatz*, Math. Ann., 26 (1886), 275-299,

  `https://rdcu.be/eadCS`

Ce dernier article s'appuie sur le théorème $AF + BG$ de Max Noether, établi rigoureusement dans :

- M. Nöther, *Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen*, Math. Ann., 6 (1873), 351-359.

  `https://rdcu.be/eadzw`

Sur l'histoire de la géométrie algébrique, jadis et naguère... III

Une référence, ancienne mais irremplaçable, sur l'histoire de la géométrie des courbes algébriques jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle :

- A. Brill, M. Noether, *Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 3 (1892-93), 107-566.
  `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN37721857X_0003`

Sur l'histoire de la géométrie algébrique et arithmétique dans le périmètre de Paris-Saclay :

- L. Illusie, *La géométrie algébrique à Orsay*.
  `https://youtu.be/Dw6NtUtwYmk?si=S52HD8qkAH7_5pOM`
  `https://youtu.be/0koAvkFFn0w?si=1-9EjJUTqHzyjcCB`
  `https://youtu.be/-JBCTIftza8?si=mKoSswFxvV1FkyJY`

Mathématiques et botanique II

L'article de V. I. Arnold où il développe la comparaison entre mathématiques et champignons est :

- V. I. Arnold, *From Hilbert's Superposition Problem to Dynamical Systems*, Amer. Math. Monthly, 111 (2004), 608-624.

  `https://www.jstor.org/stable/4145164`

En voici la version originale :

> *When you are collecting mushrooms, you only see the mushroom itself. But if you are a mycologist, you know that the real mushroom is in the earth. There's an enormous thing down there, and you just see the fruit, the body that you eat. In mathematics, the upper part of the mushroom corresponds to theorems that you see. But you don't see the things which are below, namely problems, conjectures, mistakes, ideas, and so on.*
>
> *You might have several apparently unrelated mushrooms and are unable to see what their connection is unless you know what is behind.*

Mathématiques et botanique III

Les citations d'Hermite, Hecke et Langlands dans la dernière planche de cette présentation sont extraites de :

- C. Goldstein, *Les mathématiques comme science d'observation : les convictions de Charles Hermite,* in F. Ferrara, L. Giacardi, M. Mosca, *Associazione Subalpina Mathesis Conferenze e Seminari 2010-2011*, Torino : Kim Williams, 2011, 147-156.

  `https://webusers.imj-prg.fr/ catherine.goldstein/Mathesis-Goldstein.pdf`

- W. Maak, *Erich Hecke als Lehrer*, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg, 16 (1949), 1-6.

  `https://rdcu.be/ealp4`

- R. P. Langlands, *On the zeta-functions of some simple Shimura varieties*, Can. J. Math., 31 (1979), 1121-1216.

  `https://www.cambridge.org/core/journals/canadian-journal-of-mathematics`

  `/article/on-the-zetafunctions-of-some-simple-shimura-varieties/`

  `AF93A6B9C2AB9842FF9DC20848F0C988`

La planche suivante présente ces citations dans leur langue originale.

Mathématiques et botanique III : les théoriciens des nombres, jadis et naguère, en VO

Je crois donc que l'Analyse la plus abstraite est en grande partie une science d'observation, j'assimile absolument le complexe des notions connues et à connaître dans ce domaine de l'analyse, à celles des sciences naturelles, les notions de l'analyse ayant leur individualité propre, leur figure si je puis dire, et leurs corrélations multipliées, au même degré que les animaux et les plantes.

Ch. Hermite, lettre à L. Königsberger du 2 mars 1876.

"Sie sollten sich ein Gärtchen anlegen, ein mathematisches Gärtchen, in dem Sie spazieren gehen können."

E. Hecke, à son étudiant en thèse W. Maak, $\sim$ 1935.

Some readers will find that I have given too free rein to a lamentable tendency to argue from the general to the particular, and have obfuscated them by interjecting unfamiliar concepts of representation theory into what could be a purely geometric discussion. My intention is not that, but rather to equip myself, and perhaps them as well, for a serious study of the Shimura varieties in higher dimensions. We are in a forest whose trees will not fall with a few timid hatchet blows. We have to take up the double-bitted axe and the cross-cut saw, and hope that our muscles are equal to them.

R. P. Langlands, On the zeta-functions of some simple Shimura varieties, 1979.