Feuille d'exercices n° 5 : Moments de variables aléatoires

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $p \in [0,1]$, $\lambda > 0$.

1. Calculer la variance de la loi $\mathrm{Ber}(p)$. Pour quelle valeur de p la variance de $\mathrm{Ber}(p)$ est maximale ?
2. Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$,
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$
et pour $2 \leq k \leq n$,
$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$
3. En déduire la variance de la loi $\mathrm{Bin}(n,p)$. (On pourra commencer par calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X(X-1)]$ si $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$). Commenter le résultat obtenu.
4. En utilisant la même méthode, calculer la variance de la loi $\mathrm{Poi}(\lambda)$. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 2. Calculer la variance de la loi $\mathrm{Unif}(a,b)$ de deux façons :

1. par un calcul direct
2. en déduisant cette variance de celle de $\mathrm{Unif}(0,1)$.

Exercice 3. Soit $X \sim \mathrm{Ber}(p)$ et $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^\star$

1. Calculer les fonctions génératrices des moments de $\mathrm{Ber}(p)$ et $\mathrm{Bin}(n,p)$. Commenter.
2. Retrouver les valeurs de $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathrm{Var}(Y)$ calculées à l'exercice 3.

Exercice 4. Soit $\alpha, \beta > 0$.

1. Calculer la fonction génératrice des moments φ de la loi $\mathrm{Exp}(\beta)$.
2. Développer le résultat obtenu en série entière, et retrouver la valeur des moments de la loi $\mathrm{Exp}(\beta)$.
3. Calculer la fonction génératrice des moments φ de la loi $\Gamma(\alpha,\beta)$.
4. Retrouver les deux premiers moments de la loi $\Gamma(\alpha,\beta)$ calculés à l'exercice 1.

Exercice 5.
1. Calculer la fonction génératrice des moments φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Développer le résultat obtenu en série entière, et retrouver la valeur des moments de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 6. Soit $a < b$ deux réels, et X variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1$. On veut montrer : $\mathrm{Var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

1. On suppose d'abord $a = -1$ et $b = 1$. Montrer que $\mathrm{Var}(X) \leq 1$, puis trouver une variable aléatoire qui satisfait le cas d'égalité.
2. Trouver une fonction affine $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(a) = -1$ et $\phi(b) = 1$.
3. Étudier $\phi(X)$ et conclure.

Exercice 7. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Observer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{n \geq i}$ et en déduire :
$$\mathbb{E}[N] = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N \geq i)$$
2. Dans le cas où N est de plus de carré intégrable ($\mathbb{E}[N^2] < \infty$) montrer également que
$$\sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbb{P}(N \geq i) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[N^2] + \mathbb{E}[N])$$