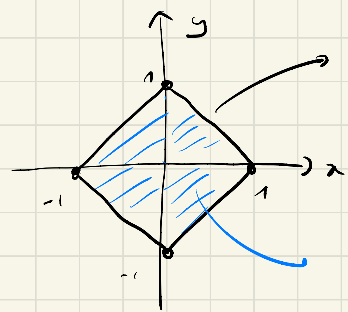
Test 2.

aire du carré ci dessous.

1. $$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{|x|+|y|\leq 1\}}\, dx\, dy = \text{Lebesgue}_{\mathbb{R}^2}\left(\{|x|+|y|\leq 1\}\right) = 2$$

ainsi $\boxed{C = \frac{1}{2}}$

2.



$\{|x|+|y|=1\}$

$\{|x|+|y|\leq 1\}$

1 carré de côté $\sqrt{2}$

4 triangles rectangles d'aire

$$\frac{1}{2} \times (1 \times 1) = \frac{1}{2}$$

(par Pythagore)

3. $$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|x|+|y|\leq 1\}}\, dy = \text{lebesgue}\{y : |y| \leq 1-|x|\}$$

$$= 2(1-|x|)\, \mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}$$

donc densité marginale de $X = \underbrace{2C}_{\substack{1\\ \shortparallel}} (1-|x|)\, \mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}$.

$Y = \overset{\shortparallel}{2C} (1-|y|)\, \mathbb{1}_{\{|y|\leq 1\}}$

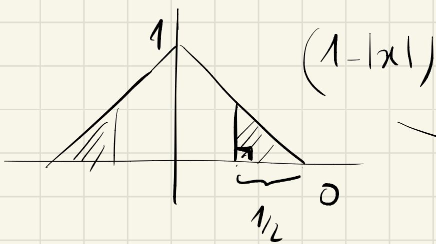
↳ par symétrie des rôles de X et de Y.

4. X et Y ne sont pas indépendants.

En effet, $\quad \mathbb{P}\left(|X| > \frac{1}{2}, |Y| > \frac{1}{2} \right) = 0$

$$\mathbb{P}\left(|X| > \frac{1}{2}\right) \mathbb{P}\left(|Y| > \frac{1}{2}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(|X| > 1/2 \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} > 0.$$



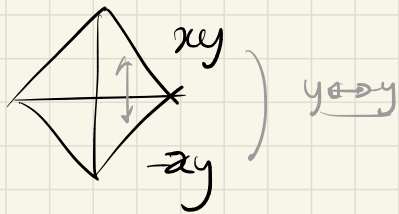
5. $E[XY]$

$$= \int \frac{xy}{2} \mathbb{1}_{\{|x|+|y| \leq 1\}} \, dx \, dy$$

$$= \int \frac{xy}{2} \mathbb{1}_{\{|x|+|y|\le 1,\, y>0\}}\, dx\, dy + \int \frac{xy}{2} \mathbb{1}_{\{|x|+|y|\le 1,\, y>0\}}\, dx\, dy \quad \boxed{= 0}$$

$\tilde{y} = -y$ ici à x fixé

$$= -\int \frac{xy}{2} \mathbb{1}_{\{|x|+|y|\le 1,\, y<0\}}\, dx\, dy$$



Autre argument :

(équivalent)

$$(X,Y) \overset{loi}{=} (X,-Y)$$

car $f(x,y) := \mathbb{1}_{\{|x|+|y|\le 1\}} \cdot c$

vérifie $f(x,-y) = f(x,y)$

et ceci implique

$$E[XY] = E[-XY]$$

$$\Rightarrow E[XY] = 0.$$

2. 1. $X \sim \mathrm{Exp}(a)$ $Y \sim \mathrm{Exp}(b)$ indépendants.

si $t > 0$, $f_{X+Y}(t) = \int_0^t a e^{-ax} b e^{-b(t-x)} dx$

$$= ab e^{-bt} \int_0^t e^{(b-a)x} dx$$

$$= \begin{cases} ab e^{-bt} \dfrac{e^{(b-a)t} - 1}{b-a} = \boxed{\dfrac{ab}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)} & \text{si } a \neq b \\ \boxed{a^2 t e^{-at}} & \text{si } a = b. \end{cases}$$

2. Pour un équivalent,

si $0 < a < b$, $f_{X+Y}(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{ab}{b-a} e^{-at}$

si $0 < a = b$ $\quad f_{X+Y}(t) = a^2 t e^{-at}$ (pas d'expression plus simple)

si $0 < b < a$, $\quad f_{X+Y}(t) \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{ab}{a-b} e^{-bt}$

Conclusion : « C'est l'exponentielle de plus petit paramètre qui fait l'effort... »

pour que la somme soit grande