Discriminant de polynômes homogènes à plusieurs variables : géométrie et arithmétique

Thomas Mordant

30 août 2023

Plan

I. Exemples classiques de discriminant

Discriminant d'un polynôme à une variable

Discriminant d'un polynôme à une variable

Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes, et soient r, r' ses racines complexes comptées avec multiplicité.

Discriminant d'un polynôme à une variable

Soit $P(X) = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes, et soient r, r' ses racines complexes comptées avec multiplicité.

Le discriminant est le nombre complexe donné par

$$\mathrm{Disc}_{1,2}(P) := a_1^2 - 4a_0 a_2 = a_2^2 (r - r')^2.$$

Discriminant d'un polynôme à une variable

Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes, et soient r, r' ses racines complexes comptées avec multiplicité.

Le discriminant est le nombre complexe donné par

$$\mathrm{Disc}_{1,2}(P) := a_1^2 - 4a_0a_2 = a_2^2(r - r')^2.$$

Ce nombre est non nul si et seulement si r et r' sont distincts.

Discriminant d'un polynôme à une variable

Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes, et soient r, r' ses racines complexes comptées avec multiplicité.

Le discriminant est le nombre complexe donné par

$$\mathrm{Disc}_{1,2}(P) := a_1^2 - 4a_0a_2 = a_2^2(r - r')^2.$$

Ce nombre est non nul si et seulement si r et r' sont distincts.

Plus généralement, si $P(X) = a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme de degré $d \geq 2$, et si $r_1, \ldots, r_d$ sont ses racines comptées avec multiplicité, le discriminant $\mathrm{Disc}_{1,d}(P)$ est le nombre complexe donné par

$$a_d^{2d-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (r_i - r_j)^2.$$

Discriminant d'un polynôme à une variable

Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes, et soient r, r' ses racines complexes comptées avec multiplicité.

Le discriminant est le nombre complexe donné par

$$\mathrm{Disc}_{1,2}(P) := a_1^2 - 4a_0a_2 = a_2^2(r - r')^2.$$

Ce nombre est non nul si et seulement si r et r' sont distincts.

Plus généralement, si $P(X) = a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme de degré $d \geq 2$, et si $r_1, \ldots, r_d$ sont ses racines comptées avec multiplicité, le discriminant $\mathrm{Disc}_{1,d}(P)$ est le nombre complexe donné par

$$a_d^{2d-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (r_i - r_j)^2.$$

Il s'écrit comme une expression polynomiale des a_i, et il est non nul si et seulement si les r_i sont distincts deux à deux, i.e. si et seulement si P n'a que des racines simples.

Discriminant d'une forme quadratique

Discriminant d'une forme quadratique

Soit $N \geq 1$ un entier et P une forme quadratique en les variables $X_0, \ldots, X_N$, i.e. un polynôme de la forme :

$$P = \sum_{0 \leq i,j \leq N} a_{ij} X_i X_j.$$

Discriminant d'une forme quadratique

Soit $N \geq 1$ un entier et P une forme quadratique en les variables $X_0, \ldots, X_N$, i.e. un polynôme de la forme :

$$P = \sum_{0 \leq i,j \leq N} a_{ij} X_i X_j.$$

On peut aussi écrire P sous forme matricielle :

$$P = {}^t X A X,$$

où X est le vecteur colonne de coordonnées $(x_0, \ldots, x_N)$ et A est la matrice $(a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$.

Discriminant d'une forme quadratique

Soit $N \geq 1$ un entier et P une forme quadratique en les variables $X_0, \dots, X_N$, i.e. un polynôme de la forme :

$$P = \sum_{0 \leq i,j \leq N} a_{ij} X_i X_j.$$

On peut aussi écrire P sous forme matricielle :

$$P = {}^t X A X,$$

où X est le vecteur colonne de coordonnées $(x_0, \dots, x_N)$ et A est la matrice $(a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$.

On suppose que A est symétrique, i.e. que la forme bilinéaire sur $\mathbb{C}^{N+1}$:

$$B : (X, X') \longmapsto {}^t(X') A X$$

est symétrique.

Discriminant d'une forme quadratique

Soit $N \geq 1$ un entier et P une forme quadratique en les variables $X_0, \ldots, X_N$, i.e. un polynôme de la forme :

$$P = \sum_{0 \leq i,j \leq N} a_{ij} X_i X_j.$$

On peut aussi écrire P sous forme matricielle :

$$P = {}^t X A X,$$

où X est le vecteur colonne de coordonnées $(x_0, \ldots, x_N)$ et A est la matrice $(a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$.

On suppose que A est symétrique, i.e. que la forme bilinéaire sur $\mathbb{C}^{N+1}$:

$$B : (X, X') \longmapsto {}^t(X') A X$$

est symétrique.

Le discriminant $\mathrm{Disc}_{N,2}(P)$ est le nombre complexe défini par

$$\mathrm{Disc}_{N,2}(P) := 2^{N+1} \det A.$$

Discriminant d'une forme quadratique

Soit $N \geq 1$ un entier et P une forme quadratique en les variables $X_0, \ldots, X_N$, i.e. un polynôme de la forme :

$$P = \sum_{0 \leq i,j \leq N} a_{ij} X_i X_j.$$

On peut aussi écrire P sous forme matricielle :

$$P = {}^t X A X,$$

où X est le vecteur colonne de coordonnées $(x_0, \ldots, x_N)$ et A est la matrice $(a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$.

On suppose que A est symétrique, i.e. que la forme bilinéaire sur $\mathbb{C}^{N+1}$:

$$B : (X, X') \longmapsto {}^t(X') A X$$

est symétrique.

Le discriminant $\mathrm{Disc}_{N,2}(P)$ est le nombre complexe défini par

$$\mathrm{Disc}_{N,2}(P) := 2^{N+1} \det A.$$

Il est non nul si et seulement si A est inversible, i.e. si et seulement si la forme bilinéaire B est non dégénérée.

II. Espace projectif et polynômes homogènes

Espace projectif

Soit $N \geq 1$ un entier.

L'espace projectif (complexe) $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{C}^{N+1}$.

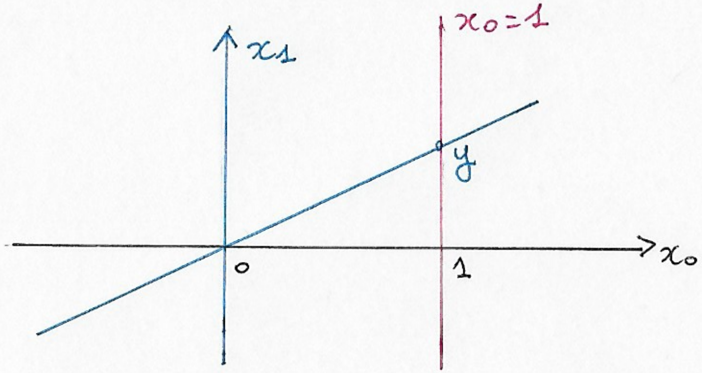
En d'autres termes, $\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}) / \sim$,

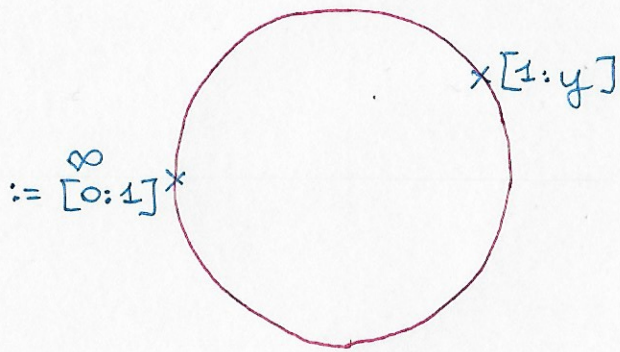
où $(x_0, \dots, x_N) \sim (x'_0, \dots, x'_N)$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $(x_0, \dots, x_N) = (\lambda x'_0, \dots, \lambda x'_N)$.

Pour $(x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : \dots : x_N] := \mathbb{C} \cdot (x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

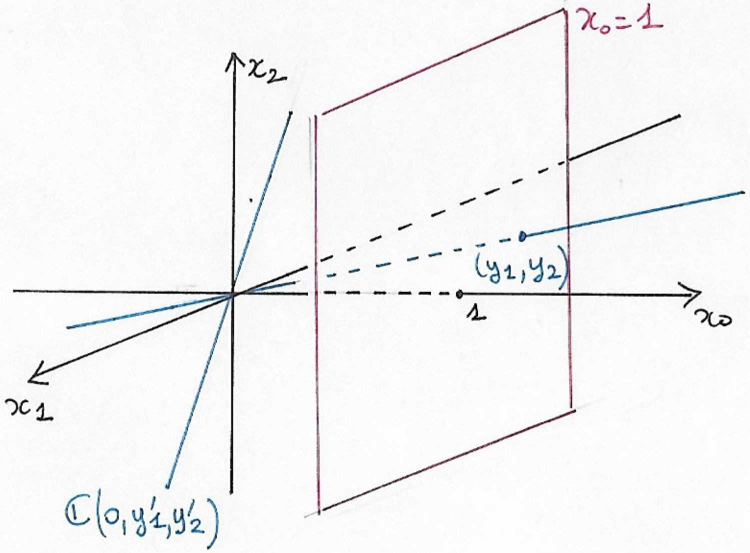
Exemples :

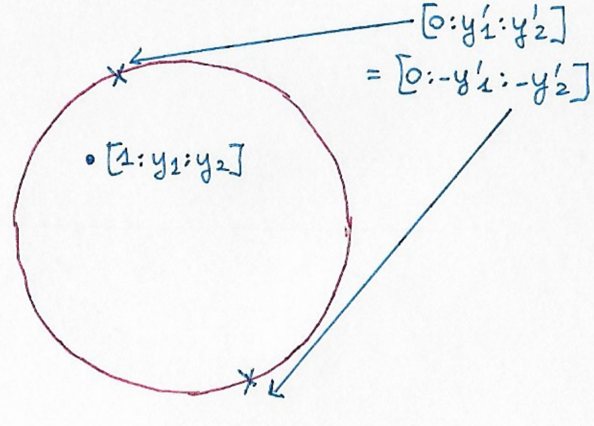
$N = 1$





$N = 2$





Hypersurface projective définie par l'annulation d'un polynôme homogène

Soient $d \geq 1$ un entier et $P \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ un polynôme non nul homogène de degré d ($P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_N) = \lambda^d P(x_0, \dots, x_N)$).

L'hypersurface projective définie par P est le sous-ensemble H de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ donné par :

$$H := (P = 0) = \{[x_0 : \dots : x_N] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \mid P(x_0, \dots, x_N) = 0\}.$$

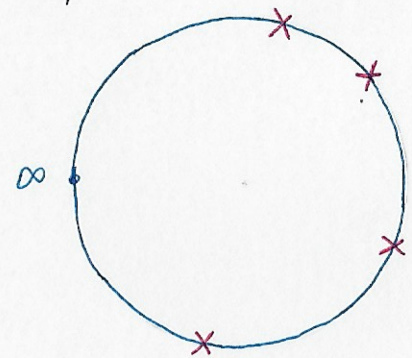
Exemples :

$N = 1$: $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$ homogène de degré d

H est fini de cardinal au plus d.

(H contient d points "comptés avec multiplicité".)

$d = 4$

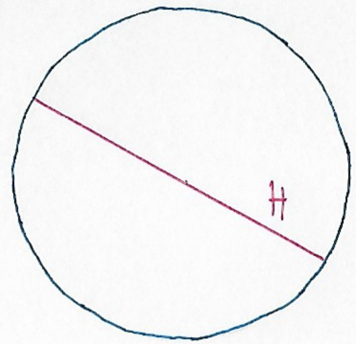


$d = 1$: P est une forme linéaire sur $\mathbb{C}^{N+1}$ dont l'annulation définit un hyperplan $V \subset \mathbb{C}^{N+1}$.

H est l'ensemble des droites contenues dans V

$\longrightarrow$ hyperplan projectif

$N = 2$



Homogénéisation de polynômes à N variables

Soit $Q \in \mathbb{C}[Y_1,\dots,Y_N]$ un polynôme dont tous les monômes non nuls sont de degré au plus d :

$$Q(Y_1,\dots,Y_N) = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_N \geq 0 \\ k_1+\dots+k_N \leq d}} a_{k_1,\dots,k_N} Y_1^{k_1} \dots Y_N^{k_N}.$$

On associe à Q le polynôme $P \in \mathbb{C}[X_0,\dots,X_N]$ homogène de degré d donné par :

$$P(X_0,\dots,X_N) := \sum_{\substack{k_1,\dots,k_N \geq 0 \\ k_1+\dots+k_N \leq d}} a_{k_1,\dots,k_N} X_0^{d-k_1-\dots-k_N} X_1^{k_1} \dots X_N^{k_N} = X_0^d \, Q\left(\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_N}{X_0}\right).$$

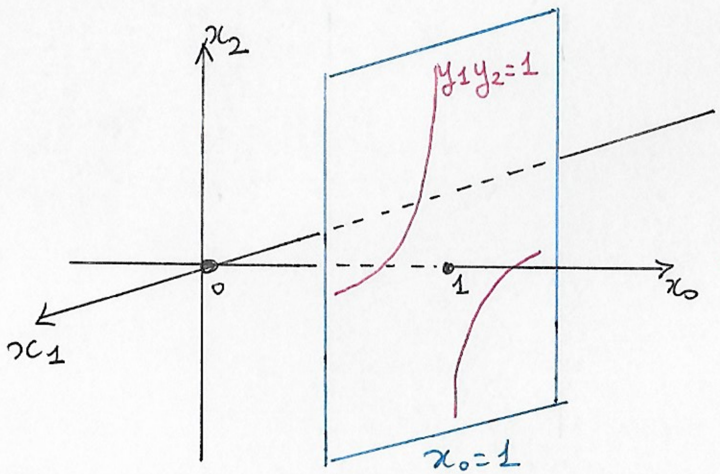
On peut retrouver Q à partir de P par la formule : $Q(Y_1,\dots,Y_N) = P(1,Y_1,\dots,Y_N)$.
On peut donc prolonger l'hypersurface $(Q=0) \subset \mathbb{C}^N \simeq \{1\}\times\mathbb{C}^N$ en une hypersurface projective $(P=0) \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

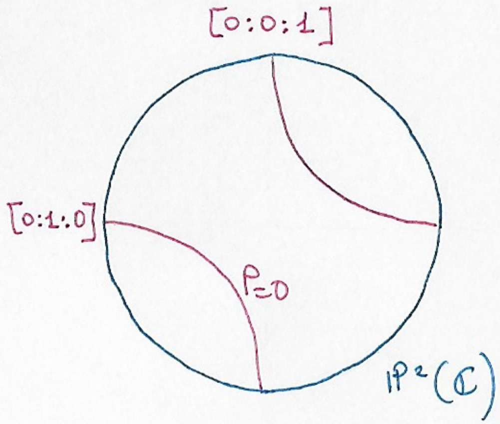
Exemple :

$N = d = 2$

$Q(Y_1,Y_2) = Y_1 Y_2 - 1$

$P(X_0,X_1,X_2) = X_1 X_2 - X_0^2$





Exemples d'homogénéisation

Droites parallèles en géométrie projective :

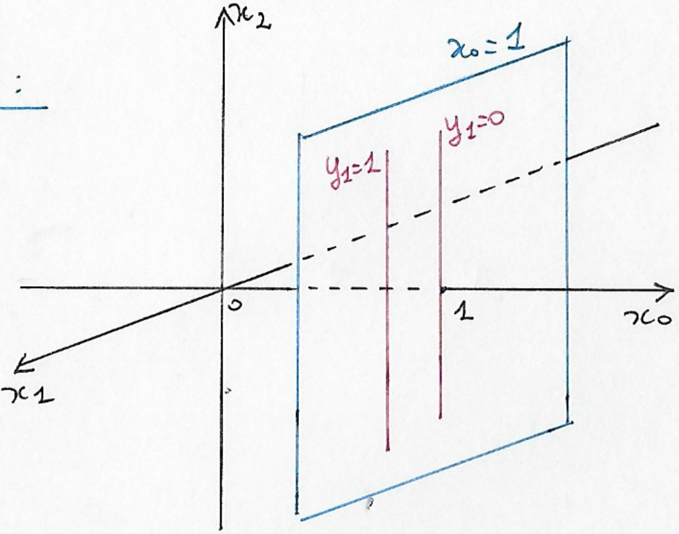
$N = 2 \quad d = 1$

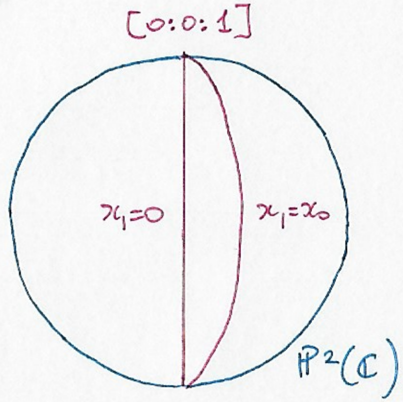
Les droites parallèles définies par :

$(y_1 = 0), (y_1 = 1)$

se prolongent en des hypersurfaces :

$(x_1 = 0), (x_1 = x_0)$



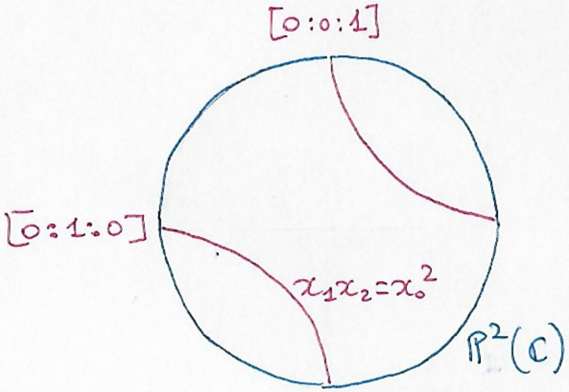


En géométrie projective, les droites parallèles se rencontrent "à l'infini".

Coniques en géométrie projective : $N = d = 2$

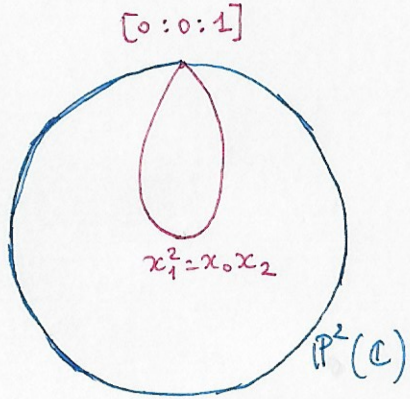
L'hyperbole $(y_1 y_2 = 1)$ se prolonge en l'hypersurface :

$(x_1 x_2 = x_0^2)$



La parabole $(y_1^2 = y_2)$ se prolonge en l'hypersurface,

$(x_1^2 = x_0 x_2)$



En géométrie projective, les paraboles et hyperboles ne diffèrent que d'un changement linéaire de coordonnées.

Exemple d'homogénéisation : intersections de deux cercles

Exemple d'homogénéisation : intersections de deux cercles

Soient C et C' deux cercles du plan centrés en $(-1/2, 0)$ et $(1/2, 0)$ et de rayons r, r'.

Exemple d'homogénéisation : intersections de deux cercles

Soient C et C' deux cercles du plan centrés en $(-1/2, 0)$ et $(1/2, 0)$ et de rayons r, r'. Ce sont des ensembles définis par les équations suivantes :

$$C : (y_1 + 1/2)^2 + y_2^2 = r^2, \quad C' : (y_1 - 1/2)^2 + y_2^2 = r'^2.$$

Exemple d'homogénéisation : intersections de deux cercles

Soient C et C' deux cercles du plan centrés en $(-1/2, 0)$ et $(1/2, 0)$ et de rayons r, r'. Ce sont des ensembles définis par les équations suivantes :

$$C : (y_1 + 1/2)^2 + y_2^2 = r^2, \quad C' : (y_1 - 1/2)^2 + y_2^2 = r'^2.$$

- Dans le plan réel, C et C' s'intersectent en deux points distincts si $|r-1| \leq r' \leq r+1$: les intersections ont pour coordonnées :

$$\left(1/2\,(r^2 - r'^2), \pm 1/2 \sqrt{-\left(r'^2 - (r-1)^2\right)\left(r'^2 - (r+1)^2\right)}\right).$$

Exemple d'homogénéisation : intersections de deux cercles

Soient C et C' deux cercles du plan centrés en $(-1/2, 0)$ et $(1/2, 0)$ et de rayons r, r'. Ce sont des ensembles définis par les équations suivantes :

$$C : (y_1 + 1/2)^2 + y_2^2 = r^2, \quad C' : (y_1 - 1/2)^2 + y_2^2 = r'^2.$$

- Dans le plan réel, C et C' s'intersectent en deux points distincts si $|r-1| \leq r' \leq r+1$: les intersections ont pour coordonnées :

$$\left(1/2\ (r^2 - r'^2), \pm 1/2 \sqrt{-\left(r'^2 - (r-1)^2\right)\left(r'^2 - (r+1)^2\right)}\right).$$

Ils sont tangents en un point si $r' \in \{|r-1|, r+1\}$, et sont disjoints si $r' < |r-1|$ ou $r' > r+1$.

Exemple d'homogénéisation : intersections de deux cercles

Soient C et C' deux cercles du plan centrés en $(-1/2, 0)$ et $(1/2, 0)$ et de rayons r, r'. Ce sont des ensembles définis par les équations suivantes :

$$C : (y_1 + 1/2)^2 + y_2^2 = r^2, \quad C' : (y_1 - 1/2)^2 + y_2^2 = r'^2.$$

- Dans le plan réel, C et C' s'intersectent en deux points distincts si $|r-1| \leq r' \leq r+1$: les intersections ont pour coordonnées :

$$\left(1/2\,(r^2 - r'^2), \pm 1/2\,\sqrt{-\left(r'^2 - (r-1)^2\right)\left(r'^2 - (r+1)^2\right)}\right).$$

  Ils sont tangents en un point si $r' \in \{|r-1|, r+1\}$, et sont disjoints si $r' < |r-1|$ ou $r' > r+1$.

- Dans le plan complexe, C et C' s'intersectent en deux points distincts si $r' \notin \{|r-1|, r+1\}$, et sont tangents en un point sinon.

Exemple d'homogénéisation : intersections de deux cercles

Soient C et C' deux cercles du plan centrés en $(-1/2, 0)$ et $(1/2, 0)$ et de rayons r, r'. Ce sont des ensembles définis par les équations suivantes :

$$C : (y_1 + 1/2)^2 + y_2^2 = r^2, \quad C' : (y_1 - 1/2)^2 + y_2^2 = r'^2.$$

- Dans le plan réel, C et C' s'intersectent en deux points distincts si $|r-1| \leq r' \leq r+1$: les intersections ont pour coordonnées :

$$\left(1/2\,(r^2 - r'^2), \pm 1/2\,\sqrt{-\left(r'^2 - (r-1)^2\right)\left(r'^2 - (r+1)^2\right)}\right).$$

  Ils sont tangents en un point si $r' \in \{|r-1|, r+1\}$, et sont disjoints si $r' < |r-1|$ ou $r' > r+1$.
- Dans le plan complexe, C et C' s'intersectent en deux points distincts si $r' \notin \{|r-1|, r+1\}$, et sont tangents en un point sinon.
- Dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, C et C' se prolongent en des hypersurfaces projectives définies par les équations homogènes :

$$(x_1 + x_0/2)^2 + x_2^2 = r^2 x_0^2, \quad (x_1 - x_0/2)^2 + x_2^2 = r'^2 x_0^2.$$

Exemple d'homogénéisation : intersections de deux cercles

Soient C et C' deux cercles du plan centrés en $(-1/2, 0)$ et $(1/2, 0)$ et de rayons r, r'. Ce sont des ensembles définis par les équations suivantes :

$$C : (y_1 + 1/2)^2 + y_2^2 = r^2, \quad C' : (y_1 - 1/2)^2 + y_2^2 = r'^2.$$

- Dans le plan réel, C et C' s'intersectent en deux points distincts si $|r-1| \leq r' \leq r+1$: les intersections ont pour coordonnées :

  $$\left(1/2\ (r^2 - r'^2), \pm 1/2 \sqrt{-\left(r'^2 - (r-1)^2\right)\left(r'^2 - (r+1)^2\right)}\right).$$

  Ils sont tangents en un point si $r' \in \{|r-1|, r+1\}$, et sont disjoints si $r' < |r-1|$ ou $r' > r+1$.
- Dans le plan complexe, C et C' s'intersectent en deux points distincts si $r' \notin \{|r-1|, r+1\}$, et sont tangents en un point sinon.
- Dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, C et C' se prolongent en des hypersurfaces projectives définies par les équations homogènes :

  $$(x_1 + x_0/2)^2 + x_2^2 = r^2 x_0^2, \quad (x_1 - x_0/2)^2 + x_2^2 = r'^2 x_0^2.$$

  Ces hypersurfaces s'intersectent en deux points supplémentaires : les points cycliques $[0 : 1 : \pm i]$.

Exemple d'homogénéisation : intersections de deux cercles

Soient C et C' deux cercles du plan centrés en $(-1/2, 0)$ et $(1/2, 0)$ et de rayons r, r'. Ce sont des ensembles définis par les équations suivantes :

$$C : (y_1 + 1/2)^2 + y_2^2 = r^2, \quad C' : (y_1 - 1/2)^2 + y_2^2 = r'^2.$$

- Dans le plan réel, C et C' s'intersectent en deux points distincts si $|r-1| \leq r' \leq r+1$: les intersections ont pour coordonnées :

  $$\left(1/2\,(r^2 - r'^2), \pm 1/2\,\sqrt{-\left(r'^2 - (r-1)^2\right)\left(r'^2 - (r+1)^2\right)}\right).$$

  Ils sont tangents en un point si $r' \in \{|r-1|, r+1\}$, et sont disjoints si $r' < |r-1|$ ou $r' > r+1$.
- Dans le plan complexe, C et C' s'intersectent en deux points distincts si $r' \notin \{|r-1|, r+1\}$, et sont tangents en un point sinon.
- Dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, C et C' se prolongent en des hypersurfaces projectives définies par les équations homogènes :

  $$(x_1 + x_0/2)^2 + x_2^2 = r^2 x_0^2, \quad (x_1 - x_0/2)^2 + x_2^2 = r'^2 x_0^2.$$

  Ces hypersurfaces s'intersectent en deux points supplémentaires : les points cycliques $[0 : 1 : \pm i]$. Donc dans le plan projectif complexe, deux cercles ont toujours quatre intersections comptées avec multiplicité.

III. Hypersurfaces lisses et discriminant d'un polynôme homogène

Points singuliers d'une hypersurface projective

Soit $H = (P = 0) \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ une hypersurface projective définie par un polynôme P non nul homogène de degré d, et $[x_0 : \dots : x_N]$ un point de H.

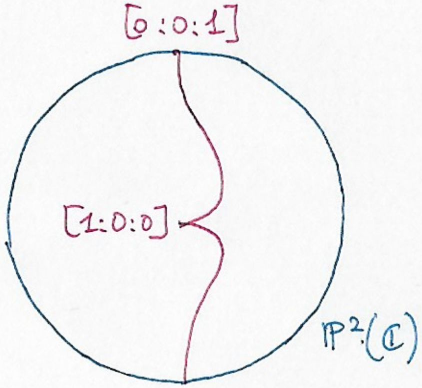
On dit que $[x_0 : \dots : x_N]$ est un point singulier de H si :

$$\frac{\partial P}{\partial x_0}(x_0, \dots, x_N) = \dots = \frac{\partial P}{\partial x_N}(x_0, \dots, x_N) = 0 .$$

On dit que H est lisse si elle n'a pas de point singulier.

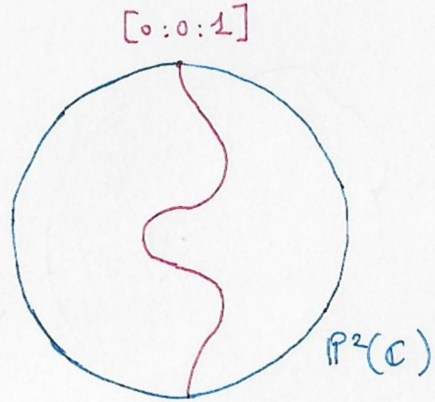
Exemples : $N = 2 \quad d = 3$

Hypersurface $(x_0 x_2^2 = x_1^3)$



Le point $[1:0:0]$ est un point singulier de l'hypersurface qui n'est donc pas lisse.

Hypersurface $(x_0 x_2^2 = x_1^3 + x_0^3)$



L'hypersurface n'a pas de point singulier et est donc lisse.

Formule d'Euler

Formule d'Euler

Si P est un polynôme homogène de degré d et $(x_0, \ldots, x_N)$ est un vecteur de $\mathbb{C}^{N+1}$, on a l'égalité :

$$x_0 \frac{\partial P}{\partial x_0}(x_0, \ldots, x_N) + \cdots + x_N \frac{\partial P}{\partial x_N}(x_0, \ldots, x_N) = d\, P(x_0, \ldots, x_N).$$

Formule d'Euler

Si P est un polynôme homogène de degré d et $(x_0, \ldots, x_N)$ est un vecteur de $\mathbb{C}^{N+1}$, on a l'égalité :

$$x_0 \frac{\partial P}{\partial x_0}(x_0, \ldots, x_N) + \cdots + x_N \frac{\partial P}{\partial x_N}(x_0, \ldots, x_N) = d\,P(x_0, \ldots, x_N).$$

On peut donc reformuler la notion de point singulier :

Formule d'Euler

Si P est un polynôme homogène de degré d et $(x_0, \dots, x_N)$ est un vecteur de $\mathbb{C}^{N+1}$, on a l'égalité :

$$x_0 \frac{\partial P}{\partial x_0}(x_0, \dots, x_N) + \cdots + x_N \frac{\partial P}{\partial x_N}(x_0, \dots, x_N) = d\, P(x_0, \dots, x_N).$$

On peut donc reformuler la notion de point singulier :

- Un point $[x_0 : \dots : x_N]$ de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est un point singulier de $(P = 0)$ si et seulement si pour tout entier $0 \leq i \leq N$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \dots x_N) = 0$,

Formule d'Euler

Si P est un polynôme homogène de degré d et $(x_0, \ldots, x_N)$ est un vecteur de $\mathbb{C}^{N+1}$, on a l'égalité :

$$x_0 \frac{\partial P}{\partial x_0}(x_0, \ldots, x_N) + \cdots + x_N \frac{\partial P}{\partial x_N}(x_0, \ldots, x_N) = d\,P(x_0, \ldots, x_N).$$

On peut donc reformuler la notion de point singulier :

- Un point $[x_0 : \ldots : x_N]$ de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est un point singulier de $(P = 0)$ si et seulement si pour tout entier $0 \leq i \leq N$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots x_N) = 0$,
- Si de plus x_j est non nul pour un entier $0 \leq j \leq N$, alors c'est un point singulier de $(P = 0)$ si et seulement si $P(x_0, \ldots, x_N) = 0$ et pour tout entier $0 \leq i \leq N$ tel que $i \neq j$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots x_N) = 0$.

Formule d'Euler

Si P est un polynôme homogène de degré d et $(x_0, \dots, x_N)$ est un vecteur de $\mathbb{C}^{N+1}$, on a l'égalité :

$$x_0 \frac{\partial P}{\partial x_0}(x_0, \dots, x_N) + \cdots + x_N \frac{\partial P}{\partial x_N}(x_0, \dots, x_N) = d\, P(x_0, \dots, x_N).$$

On peut donc reformuler la notion de point singulier :

- Un point $[x_0 : \dots : x_N]$ de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est un point singulier de $(P = 0)$ si et seulement si pour tout entier $0 \leq i \leq N$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \dots x_N) = 0$,
- Si de plus x_j est non nul pour un entier $0 \leq j \leq N$, alors c'est un point singulier de $(P = 0)$ si et seulement si $P(x_0, \dots, x_N) = 0$ et pour tout entier $0 \leq i \leq N$ tel que $i \neq j$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \dots x_N) = 0$.

En particulier, si $Q \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_N]$ est le polynôme défini par $Q(y_1, \dots, y_N) := P(1, y_1, \dots, y_N)$, pour tout $(y_1, \dots, y_N)$ dans $\mathbb{C}^N$, l'hypersurface projective $(P = 0)$ a un point singulier en $[1 : y_1 : \dots : y_N]$ si et seulement si Q et ses dérivées partielles s'annulent en $(y_1, \dots, y_N)$, en d'autres termes, si et seulement si l'hypersurface $(Q = 0)$ dans $\mathbb{C}^N$ a un point singulier en $(y_1, \dots, y_N)$.

Lissité et discriminant d'un polynôme à une variable

Lissité et discriminant d'un polynôme à une variable

Soit

$$Q(y_1) = a_d y_1^d + \cdots + a_0$$

un polynôme de degré $d \geq 2$ et soit

$$P(x_0, x_1) = a_d x_1^d + a_{d-1} x_0 x_1^{d-1} + \cdots + a_0 x_0^d$$

son homogénéisation.

Lissité et discriminant d'un polynôme à une variable

Soit

$$Q(y_1) = a_d y_1^d + \cdots + a_0$$

un polynôme de degré $d \geq 2$ et soit

$$P(x_0, x_1) = a_d x_1^d + a_{d-1} x_0 x_1^{d-1} + \cdots + a_0 x_0^d$$

son homogénéisation.

L'hypersurface $(P = 0) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points $[1 : y_1]$ tels que $Q(y_1) = 0$.

Lissité et discriminant d'un polynôme à une variable

Soit

$$Q(y_1) = a_d y_1^d + \cdots + a_0$$

un polynôme de degré $d \geq 2$ et soit

$$P(x_0, x_1) = a_d x_1^d + a_{d-1} x_0 x_1^{d-1} + \cdots + a_0 x_0^d$$

son homogénéisation.

L'hypersurface $(P = 0) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points $[1 : y_1]$ tels que $Q(y_1) = 0$. Un tel point est singulier si et seulement si $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y_1}(y_1) = 0$, i.e. si et seulement si y_1 est une racine multiple de Q.

Lissité et discriminant d'un polynôme à une variable

Soit

$$Q(y_1) = a_d y_1^d + \cdots + a_0$$

un polynôme de degré $d \geq 2$ et soit

$$P(x_0, x_1) = a_d x_1^d + a_{d-1} x_0 x_1^{d-1} + \cdots + a_0 x_0^d$$

son homogénéisation.

L'hypersurface $(P = 0) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points $[1 : y_1]$ tels que $Q(y_1) = 0$. Un tel point est singulier si et seulement si $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y_1}(y_1) = 0$, i.e. si et seulement si y_1 est une racine multiple de Q.

Donc l'hypersurface $(P = 0)$ est lisse si et seulement si toutes les racines de Q sont simples, i.e. si et seulement si $\mathrm{Disc}_{1,d}(Q) \neq 0$.

Lissité et discriminant d'un polynôme de degré 2

Lissité et discriminant d'un polynôme de degré 2

Soit

$$P(x_0, \ldots, x_N) = \sum_{0 \leq i,j \leq N} a_{ij} x_i x_j$$

un polynôme de degré 2. On suppose que la matrice $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ est symétrique.

Lissité et discriminant d'un polynôme de degré 2

Soit

$$P(x_0, \dots, x_N) = \sum_{0 \le i,j \le N} a_{ij} x_i x_j$$

un polynôme de degré 2. On suppose que la matrice $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le N}$ est symétrique. Pour tout entier $0 \le i \le N$ et pour tout vecteur $(x_0, \dots, x_N)$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_N) = 2a_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j + \sum_{j \neq i} a_{ji} x_j = 2 \sum_{j=0}^{N} a_{ij} x_j.$$

Lissité et discriminant d'un polynôme de degré 2

Soit

$$P(x_0, \dots, x_N) = \sum_{0 \leq i,j \leq N} a_{ij} x_i x_j$$

un polynôme de degré 2. On suppose que la matrice $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ est symétrique. Pour tout entier $0 \leq i \leq N$ et pour tout vecteur $(x_0, \dots, x_N)$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_N) = 2a_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j + \sum_{j \neq i} a_{ji}x_j = 2\sum_{j=0}^{N} a_{ij}x_j.$$

Donc un point $[x_0 : \dots : x_N]$ de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est un point singulier de $(P = 0)$ si et seulement si pour tout i, $\sum_{j=0}^{N} a_{ij}x_j = 0$, i.e. si et seulement si le vecteur $(x_0, \dots, x_N)$ est dans le noyau de A.

Lissité et discriminant d'un polynôme de degré 2

Soit

$$P(x_0, \dots, x_N) = \sum_{0 \le i,j \le N} a_{ij} x_i x_j$$

un polynôme de degré 2. On suppose que la matrice $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le N}$ est symétrique. Pour tout entier $0 \le i \le N$ et pour tout vecteur $(x_0, \dots, x_N)$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_N) = 2a_{ii}x_i + \sum_{j \ne i} a_{ij} x_j + \sum_{j \ne i} a_{ji} x_j = 2 \sum_{j=0}^{N} a_{ij} x_j .$$

Donc un point $[x_0 : \dots : x_N]$ de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est un point singulier de $(P = 0)$ si et seulement si pour tout i, $\sum_{j=0}^{N} a_{ij} x_j = 0$, i.e. si et seulement si le vecteur $(x_0, \dots, x_N)$ est dans le noyau de A.

Donc l'hypersurface projective $(P = 0)$ est lisse si et seulement si A est inversible, i.e. si et seulement si $\mathrm{Disc}_{N,2}(P) \ne 0$.

Lissité et discriminant d'un polynôme de degré 2

Soit

$$P(x_0, \ldots, x_N) = \sum_{0 \leq i,j \leq N} a_{ij} x_i x_j$$

un polynôme de degré 2. On suppose que la matrice $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ est symétrique. Pour tout entier $0 \leq i \leq N$ et pour tout vecteur $(x_0, \ldots, x_N)$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots, x_N) = 2a_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j + \sum_{j \neq i} a_{ji} x_j = 2 \sum_{j=0}^{N} a_{ij} x_j.$$

Donc un point $[x_0 : \ldots : x_N]$ de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est un point singulier de $(P = 0)$ si et seulement si pour tout i, $\sum_{j=0}^{N} a_{ij} x_j = 0$, i.e. si et seulement si le vecteur $(x_0, \ldots, x_N)$ est dans le noyau de A.

Donc l'hypersurface projective $(P = 0)$ est lisse si et seulement si A est inversible, i.e. si et seulement si $\mathrm{Disc}_{N,2}(P) \neq 0$.

On veut donc construire pour tous N, d, une expression $\mathrm{Disc}_{N,d}(P)$ polynomiale en les coefficients d'un polynôme homogène P, qui s'annule si et seulement si l'hypersurface projective $(P = 0)$ n'est pas lisse.

Anneau de polynômes en les coefficients d'un polynôme homogène

Anneau de polynômes en les coefficients d'un polynôme homogène

Soit $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]$ des polynômes homogènes de degré d.

Anneau de polynômes en les coefficients d'un polynôme homogène

Soit $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]$ des polynômes homogènes de degré d. Il est de dimension $\binom{N+d}{d}$ et admet une base donnée par les monômes :

$$X_0^{k_0} \ldots X_N^{k_N} \quad \text{où} \quad (k_0, \ldots, k_N) \in \mathbb{N}^{N+1},\ k_0 + \cdots + k_N = d.$$

Anneau de polynômes en les coefficients d'un polynôme homogène

Soit $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]$ des polynômes homogènes de degré d. Il est de dimension $\binom{N+d}{d}$ et admet une base donnée par les monômes :

$$X_0^{k_0} \ldots X_N^{k_N} \quad \text{où} \quad (k_0, \ldots, k_N) \in \mathbb{N}^{N+1},\ k_0 + \cdots + k_N = d.$$

Soit $I_{N,d}$ l'ensemble des $(N+1)$-uplets $(k_0, \ldots, k_N)$ comme ci-dessus.

Anneau de polynômes en les coefficients d'un polynôme homogène

Soit $\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_N]_d$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_N]$ des polynômes homogènes de degré d. Il est de dimension $\binom{N+d}{d}$ et admet une base donnée par les monômes :

$$X_0^{k_0}\ldots X_N^{k_N} \quad \text{où} \quad (k_0,\ldots,k_N)\in\mathbb{N}^{N+1},\ k_0+\cdots+k_N=d.$$

Soit $I_{N,d}$ l'ensemble des $(N+1)$-uplets $(k_0,\ldots,k_N)$ comme ci-dessus. On définit un anneau de polynômes par

$$A_{N,d}:=\mathbb{C}\big[\{T_{k_0,\ldots,k_N},(k_0,\ldots,k_N)\in I_{N,d}\}\big].$$

Anneau de polynômes en les coefficients d'un polynôme homogène

Soit $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]_d$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ des polynômes homogènes de degré d. Il est de dimension $\binom{N+d}{d}$ et admet une base donnée par les monômes :

$$X_0^{k_0} \dots X_N^{k_N} \quad \text{où} \quad (k_0, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^{N+1},\ k_0 + \cdots + k_N = d.$$

Soit $I_{N,d}$ l'ensemble des $(N+1)$-uplets $(k_0, \dots, k_N)$ comme ci-dessus. On définit un anneau de polynômes par

$$A_{N,d} := \mathbb{C}\big[\{T_{k_0,\dots,k_N}, (k_0, \dots, k_N) \in I_{N,d}\}\big].$$

Si F est un polynôme dans $A_{N,d}$ et P est un polynôme homogène de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]_d$, en écrivant P sous la forme

$$P = \sum_{(k_0,\dots,k_N) \in I_{N,d}} a_{k_0,\dots,k_N} X_0^{k_0} \dots X_N^{k_N},$$

où les $a_{k_0,\dots,k_N}$ sont des nombres complexes, on pose :

$$F(P) := F\big((a_{k_0,\dots,k_N})_{(k_0,\dots,k_N) \in I_{N,d}}\big) \in \mathbb{C}.$$

Argument informel pour la construction du discriminant

Argument informel pour la construction du discriminant

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]_d$ des polynômes homogènes de degré d à $\mathbb{C}^{\binom{N+d}{d}}$.

Argument informel pour la construction du discriminant

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ des polynômes homogènes de degré d à $\mathbb{C}^{\binom{N+d}{d}}$. Soit Σ l'ensemble défini par :

$$\Sigma := \Big\{([x_0 : \ldots : x_N], \mathbb{C}\,.\,P) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C}) \\ \mid \text{l'hypersurface } (P = 0) \text{ admet un point singulier en } [x_0 : \ldots : x_N]\Big\},$$

Argument informel pour la construction du discriminant

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ des polynômes homogènes de degré d à $\mathbb{C}^{\binom{N+d}{d}}$. Soit Σ l'ensemble défini par :

$$\Sigma := \Big\{ ([x_0 : \ldots : x_N], \mathbb{C}\,.\,P) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C}) \\ \mid \text{l'hypersurface } (P = 0) \text{ admet un point singulier en } [x_0 : \ldots : x_N] \Big\},$$

et soient $\mathrm{pr}_1 : \Sigma \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $\mathrm{pr}_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ les deux projections.

Argument informel pour la construction du discriminant

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ des polynômes homogènes de degré d à $\mathbb{C}^{\binom{N+d}{d}}$. Soit Σ l'ensemble défini par :

$$\Sigma := \Big\{([x_0 : \ldots : x_N], \mathbb{C}\,.\,P) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C}) \\ \mid \text{l'hypersurface } (P = 0) \text{ admet un point singulier en } [x_0 : \ldots : x_N]\Big\},$$

et soient $\mathrm{pr}_1 : \Sigma \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $\mathrm{pr}_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ les deux projections.

Pour tout $x = [x_0 : \ldots : x_N]$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, par la formule d'Euler, l'ensemble $\mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ est défini dans $\{x\} \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ par les $N + 1$ équations indépendantes en P : pour tout $0 \leq i \leq N$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots, x_N) = 0$,

Argument informel pour la construction du discriminant

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ des polynômes homogènes de degré d à $\mathbb{C}^{\binom{N+d}{d}}$. Soit Σ l'ensemble défini par :

$$\Sigma := \Big\{ ([x_0 : \ldots : x_N], \mathbb{C}\,.\,P) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$$

$$\mid \text{l'hypersurface } (P = 0) \text{ admet un point singulier en } [x_0 : \ldots : x_N] \Big\},$$

et soient $\mathrm{pr}_1 : \Sigma \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $\mathrm{pr}_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ les deux projections.

Pour tout $x = [x_0 : \ldots : x_N]$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, par la formule d'Euler, l'ensemble $\mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ est défini dans $\{x\} \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ par les $N+1$ équations indépendantes en P : pour tout $0 \leq i \leq N$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots, x_N) = 0$, donc il admet $\binom{N+d}{d} - 1 - (N+1)$ « degrés de liberté ».

Argument informel pour la construction du discriminant

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ des polynômes homogènes de degré d à $\mathbb{C}^{\binom{N+d}{d}}$. Soit Σ l'ensemble défini par :

$$\Sigma := \Big\{([x_0 : \ldots : x_N], \mathbb{C}\,.\,P) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C}) \\ \mid \text{l'hypersurface } (P = 0) \text{ admet un point singulier en } [x_0 : \ldots : x_N]\Big\},$$

et soient $\mathrm{pr}_1 : \Sigma \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $\mathrm{pr}_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ les deux projections.

Pour tout $x = [x_0 : \ldots : x_N]$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, par la formule d'Euler, l'ensemble $\mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ est défini dans $\{x\} \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ par les $N+1$ équations indépendantes en P : pour tout $0 \leq i \leq N$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots, x_N) = 0$, donc il admet $\binom{N+d}{d} - 1 - (N+1)$ « degrés de liberté ».

Donc l'ensemble Σ admet $\binom{N+d}{d} - 1 - (N+1) + N = \binom{N+d}{d} - 2$ degrés de liberté.

Argument informel pour la construction du discriminant

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ des polynômes homogènes de degré d à $\mathbb{C}^{\binom{N+d}{d}}$. Soit Σ l'ensemble défini par :

$$\Sigma := \Big\{([x_0 : \ldots : x_N], \mathbb{C}\,.\,P) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$$

$$\mid \text{l'hypersurface } (P = 0) \text{ admet un point singulier en } [x_0 : \ldots : x_N]\Big\},$$

et soient $\mathrm{pr}_1 : \Sigma \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $\mathrm{pr}_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ les deux projections.

Pour tout $x = [x_0 : \ldots : x_N]$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, par la formule d'Euler, l'ensemble $\mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ est défini dans $\{x\} \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ par les $N+1$ équations indépendantes en P : pour tout $0 \leq i \leq N$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots, x_N) = 0$, donc il admet $\binom{N+d}{d} - 1 - (N+1)$ « degrés de liberté ».

Donc l'ensemble Σ admet $\binom{N+d}{d} - 1 - (N+1) + N = \binom{N+d}{d} - 2$ degrés de liberté. Donc le sous-ensemble $\mathrm{pr}_2(\Sigma)$ de $\mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ admet au plus $\binom{N+d}{d} - 2$ degrés de liberté.

Argument informel pour la construction du discriminant

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ des polynômes homogènes de degré d à $\mathbb{C}^{\binom{N+d}{d}}$. Soit Σ l'ensemble défini par :

$$\Sigma := \Big\{([x_0 : \ldots : x_N], \mathbb{C} \, . \, P) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$$

$$\mid \text{l'hypersurface } (P = 0) \text{ admet un point singulier en } [x_0 : \ldots : x_N]\Big\},$$

et soient $\mathrm{pr}_1 : \Sigma \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $\mathrm{pr}_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ les deux projections.

Pour tout $x = [x_0 : \ldots : x_N]$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, par la formule d'Euler, l'ensemble $\mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ est défini dans $\{x\} \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ par les $N + 1$ équations indépendantes en P : pour tout $0 \leq i \leq N$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots, x_N) = 0$, donc il admet $\binom{N+d}{d} - 1 - (N + 1)$ « degrés de liberté ».

Donc l'ensemble Σ admet $\binom{N+d}{d} - 1 - (N + 1) + N = \binom{N+d}{d} - 2$ degrés de liberté. Donc le sous-ensemble $\mathrm{pr}_2(\Sigma)$ de $\mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ admet au plus $\binom{N+d}{d} - 2$ degrés de liberté. Comme il existe des polynômes définissant des hypersurfaces avec un seul point singulier, cet ensemble admet $\binom{N+d}{d} - 2$ degrés de liberté.

Argument informel pour la construction du discriminant

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ des polynômes homogènes de degré d à $\mathbb{C}^{\binom{N+d}{d}}$. Soit Σ l'ensemble défini par :

$$\Sigma := \Big\{([x_0 : \ldots : x_N], \mathbb{C}\,.\,P) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$$

$$\mid \text{l'hypersurface } (P = 0) \text{ admet un point singulier en } [x_0 : \ldots : x_N]\Big\},$$

et soient $\mathrm{pr}_1 : \Sigma \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $\mathrm{pr}_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ les deux projections.

Pour tout $x = [x_0 : \ldots : x_N]$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, par la formule d'Euler, l'ensemble $\mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ est défini dans $\{x\} \times \mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ par les $N+1$ équations indépendantes en P : pour tout $0 \leq i \leq N$, $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots, x_N) = 0$, donc il admet $\binom{N+d}{d} - 1 - (N+1)$ « degrés de liberté ».

Donc l'ensemble Σ admet $\binom{N+d}{d} - 1 - (N+1) + N = \binom{N+d}{d} - 2$ degrés de liberté. Donc le sous-ensemble $\mathrm{pr}_2(\Sigma)$ de $\mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ admet au plus $\binom{N+d}{d} - 2$ degrés de liberté. Comme il existe des polynômes définissant des hypersurfaces avec un seul point singulier, cet ensemble admet $\binom{N+d}{d} - 2$ degrés de liberté.

Donc l'ensemble $\mathrm{pr}_2(\Sigma)$ est une hypersurface de $\mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}(\mathbb{C})$ définie par l'annulation d'un polynôme homogène $\mathrm{Disc}_{N,d} \in A_{N,d}$.

Propriétés du discriminant d'un polynôme homogène

Propriétés du discriminant d'un polynôme homogène

L'élément $\mathrm{Disc}_{N,d}$ de l'anneau de polynômes $A_{N,d}$ vérifie les propriétés suivantes :

Propriétés du discriminant d'un polynôme homogène

L'élément $\mathrm{Disc}_{N,d}$ de l'anneau de polynômes $A_{N,d}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$, le nombre complexe $\mathrm{Disc}_{N,d}(P)$ s'annule si et seulement si l'hypersurface projective $(P = 0)$ est non lisse,

Propriétés du discriminant d'un polynôme homogène

L'élément $\mathrm{Disc}_{N,d}$ de l'anneau de polynômes $A_{N,d}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$, le nombre complexe $\mathrm{Disc}_{N,d}(P)$ s'annule si et seulement si l'hypersurface projective $(P = 0)$ est non lisse,
2. Le polynôme $\mathrm{Disc}_{N,d}$ est homogène de degré $(N+1)(d-1)^N$ en les indéterminées $(T_{k_0,\ldots,k_N})_{(k_0,\ldots,k_N)\in I_{N,d}}$, i.e. pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ et pour tout λ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\mathrm{Disc}_{N,d}(\lambda P) = \lambda^{(N+1)(d-1)^N} \mathrm{Disc}(P).$$

Propriétés du discriminant d'un polynôme homogène

L'élément $\mathrm{Disc}_{N,d}$ de l'anneau de polynômes $A_{N,d}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$, le nombre complexe $\mathrm{Disc}_{N,d}(P)$ s'annule si et seulement si l'hypersurface projective $(P = 0)$ est non lisse,
2. Le polynôme $\mathrm{Disc}_{N,d}$ est homogène de degré $(N+1)(d-1)^N$ en les indéterminées $(T_{k_0,\ldots,k_N})_{(k_0,\ldots,k_N)\in I_{N,d}}$, i.e. pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ et pour tout λ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\mathrm{Disc}_{N,d}(\lambda P) = \lambda^{(N+1)(d-1)^N}\mathrm{Disc}(P).$$

L'élément $\mathrm{Disc}_{N,d}$ de $A_{N,d}$ est unique (à multiplication par un nombre complexe non nul près) parmi les éléments satisfaisant les propriétés 1 et 2.

Propriétés du discriminant d'un polynôme homogène

L'élément $\mathrm{Disc}_{N,d}$ de l'anneau de polynômes $A_{N,d}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$, le nombre complexe $\mathrm{Disc}_{N,d}(P)$ s'annule si et seulement si l'hypersurface projective $(P = 0)$ est non lisse,
2. Le polynôme $\mathrm{Disc}_{N,d}$ est homogène de degré $(N+1)(d-1)^N$ en les indéterminées $(T_{k_0,\ldots,k_N})_{(k_0,\ldots,k_N)\in I_{N,d}}$, i.e. pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ et pour tout λ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\mathrm{Disc}_{N,d}(\lambda P) = \lambda^{(N+1)(d-1)^N} \mathrm{Disc}(P).$$

L'élément $\mathrm{Disc}_{N,d}$ de $A_{N,d}$ est unique (à multiplication par un nombre complexe non nul près) parmi les éléments satisfaisant les propriétés 1 et 2.

Il est aussi un polynôme irréductible, c'est-à-dire que pour toute décomposition $\mathrm{Disc}_{N,d} = Q_1 Q_2$ avec Q_1, Q_2 des polynômes dans $A_{N,d}$, Q_1 ou Q_2 est un polynôme constant.

Propriétés du discriminant d'un polynôme homogène

L'élément $\mathrm{Disc}_{N,d}$ de l'anneau de polynômes $A_{N,d}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$, le nombre complexe $\mathrm{Disc}_{N,d}(P)$ s'annule si et seulement si l'hypersurface projective $(P = 0)$ est non lisse,
2. Le polynôme $\mathrm{Disc}_{N,d}$ est homogène de degré $(N+1)(d-1)^N$ en les indéterminées $(T_{k_0,\ldots,k_N})_{(k_0,\ldots,k_N)\in I_{N,d}}$, i.e. pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ et pour tout λ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\mathrm{Disc}_{N,d}(\lambda P) = \lambda^{(N+1)(d-1)^N}\mathrm{Disc}(P).$$

L'élément $\mathrm{Disc}_{N,d}$ de $A_{N,d}$ est unique (à multiplication par un nombre complexe non nul près) parmi les éléments satisfaisant les propriétés 1 et 2.

Il est aussi un polynôme irréductible, c'est-à-dire que pour toute décomposition $\mathrm{Disc}_{N,d} = Q_1 Q_2$ avec Q_1, Q_2 des polynômes dans $A_{N,d}$, Q_1 ou Q_2 est un polynôme constant.

Si $d = 1$, $\mathrm{Disc}_{N,1}$ est un polynôme homogène de degré 0, i.e. constant, et non nul. C'est cohérent avec le fait que toutes les hypersurfaces projectives de degré 1 sont lisses.

IV. Invariants de polynômes homogènes

Changement linéaire de variables et équivalence linéaire

Changement linéaire de variables et équivalence linéaire

Soit P un polynôme homogène de $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ et $M = (M_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ une matrice de $\mathcal{M}_{N+1,\mathbb{C}}$.

Changement linéaire de variables et équivalence linéaire

Soit P un polynôme homogène de $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ et $M = (M_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ une matrice de $\mathcal{M}_{N+1,\mathbb{C}}$. On peut définir un nouveau polynôme homogène de degré d par :

$$P \circ M := P\left(\sum_{j=0}^{N} m_{0j} X_j, \sum_{j=0}^{N} m_{1j} X_j, \ldots, \sum_{j=0}^{N} m_{Nj} X_j \right).$$

Changement linéaire de variables et équivalence linéaire

Soit P un polynôme homogène de $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ et $M = (M_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ une matrice de $\mathcal{M}_{N+1,\mathbb{C}}$. On peut définir un nouveau polynôme homogène de degré d par :

$$P \circ M := P\left(\sum_{j=0}^{N} m_{0j} X_j, \sum_{j=0}^{N} m_{1j} X_j, \ldots, \sum_{j=0}^{N} m_{Nj} X_j\right).$$

Par exemple, si M est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_{N+1}$, alors $P \circ M = \lambda^d P$.

Changement linéaire de variables et équivalence linéaire

Soit P un polynôme homogène de $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ et $M = (M_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ une matrice de $\mathcal{M}_{N+1,\mathbb{C}}$. On peut définir un nouveau polynôme homogène de degré d par :

$$P \circ M := P\left(\sum_{j=0}^{N} m_{0j} X_j, \sum_{j=0}^{N} m_{1j} X_j, \ldots, \sum_{j=0}^{N} m_{Nj} X_j\right).$$

Par exemple, si M est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_{N+1}$, alors $P \circ M = \lambda^d P$. De plus, si M, M' sont deux matrices, on a :

$$(P \circ M) \circ M' = P \circ (MM').$$

Changement linéaire de variables et équivalence linéaire

Soit P un polynôme homogène de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]_d$ et $M = (M_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ une matrice de $\mathcal{M}_{N+1,\mathbb{C}}$. On peut définir un nouveau polynôme homogène de degré d par :

$$P \circ M := P\left(\sum_{j=0}^{N} m_{0j} X_j, \sum_{j=0}^{N} m_{1j} X_j, \dots, \sum_{j=0}^{N} m_{Nj} X_j\right).$$

Par exemple, si M est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_{N+1}$, alors $P \circ M = \lambda^d P$. De plus, si M, M' sont deux matrices, on a :

$$(P \circ M) \circ M' = P \circ (MM').$$

On dit que deux polynômes P et P' non nuls dans $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]_d$ sont GL-équivalents (resp. SL-équivalents) sur $\mathbb{C}$ s'il existe une matrice M dans $\mathrm{GL}_{N+1,\mathbb{C}}$ (resp. $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{C}}$) telle que $P' = P \circ M$.

Changement linéaire de variables et équivalence linéaire

Soit P un polynôme homogène de $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ et $M = (M_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ une matrice de $\mathcal{M}_{N+1,\mathbb{C}}$. On peut définir un nouveau polynôme homogène de degré d par :

$$P \circ M := P\left(\sum_{j=0}^{N} m_{0j} X_j, \sum_{j=0}^{N} m_{1j} X_j, \ldots, \sum_{j=0}^{N} m_{Nj} X_j\right).$$

Par exemple, si M est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_{N+1}$, alors $P \circ M = \lambda^d P$. De plus, si M, M' sont deux matrices, on a :

$$(P \circ M) \circ M' = P \circ (MM').$$

On dit que deux polynômes P et P' non nuls dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ sont GL-équivalents (resp. SL-équivalents) sur $\mathbb{C}$ s'il existe une matrice M dans $\mathrm{GL}_{N+1,\mathbb{C}}$ (resp. $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{C}}$) telle que $P' = P \circ M$. Si P et P' sont GL-équivalents et si $H = (P = 0)$, $H' = (P' = 0)$ sont les hypersurfaces de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ définies par les polynômes P et P', alors la bijection :

$$M : \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}),$$

$$[x_0 : \ldots : x_N] \longmapsto \left[\sum_{j=0}^{N} m_{0j} x_j : \sum_{j=0}^{N} m_{1j} x_j : \ldots : \sum_{j=0}^{N} m_{Nj} x_j\right],$$

induit une bijection de H' dans H.

Invariants de polynômes homogènes

Invariants de polynômes homogènes

On dit qu'un polynôme I dans $A_{N,d}$ est un invariant de degré δ s'il est homogène de degré δ en les $(T_{k_0,\ldots,k_N})_{(k_0,\ldots,k_N)\in I_{N,d}}$ et si pour tout couple (P,P') de polynômes SL-équivalents dans $\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_N]_d$, on a :

$$I(P') = I(P).$$

On dit qu'un polynôme I dans $A_{N,d}$ est un invariant de degré δ s'il est homogène de degré δ en les $(T_{k_0,\dots,k_N})_{(k_0,\dots,k_N)\in I_{N,d}}$ et si pour tout couple (P,P') de polynômes SL-équivalents dans $\mathbb{C}[X_0,\dots,X_N]_d$, on a :

$$I(P') = I(P).$$

En appliquant cette propriété à $P' := P \circ (e^{\frac{2i\pi}{N+1}}\mathrm{Id}) = e^{\frac{2id\pi}{N+1}} P$ pour tout P, on obtient que si I est non nul, alors $N+1$ divise $d\delta$.

Invariants de polynômes homogènes

On dit qu'un polynôme I dans $A_{N,d}$ est un invariant de degré δ s'il est homogène de degré δ en les $(T_{k_0,\ldots,k_N})_{(k_0,\ldots,k_N)\in I_{N,d}}$ et si pour tout couple (P, P') de polynômes SL-équivalents dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$, on a :

$$I(P') = I(P).$$

En appliquant cette propriété à $P' := P \circ (e^{\frac{2i\pi}{N+1}} \mathrm{Id}) = e^{\frac{2id\pi}{N+1}} P$ pour tout P, on obtient que si I est non nul, alors $N + 1$ divise $d\delta$.

De plus, toute matrice M dans $\mathrm{GL}_{N+1,\mathbb{C}}$ peut s'écrire $M = \lambda M'$ avec M' dans $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{C}}$ et λ une racine $(N + 1)$-ième de $\det M$, donc on a :

$$I(P \circ M) = \lambda^{d\delta} I(P \circ M') = (\det M)^{\frac{d\delta}{N+1}} I(P).$$

Invariants de polynômes homogènes

On dit qu'un polynôme I dans $A_{N,d}$ est un invariant de degré δ s'il est homogène de degré δ en les $(T_{k_0,\ldots,k_N})_{(k_0,\ldots,k_N)\in I_{N,d}}$ et si pour tout couple (P, P') de polynômes SL-équivalents dans $\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_N]_d$, on a :

$$I(P') = I(P).$$

En appliquant cette propriété à $P' := P \circ (e^{\frac{2i\pi}{N+1}}\mathrm{Id}) = e^{\frac{2id\pi}{N+1}} P$ pour tout P, on obtient que si I est non nul, alors $N+1$ divise $d\delta$.

De plus, toute matrice M dans $\mathrm{GL}_{N+1,\mathbb{C}}$ peut s'écrire $M = \lambda M'$ avec M' dans $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{C}}$ et λ une racine $(N+1)$-ième de $\det M$, donc on a :

$$I(P\circ M) = \lambda^{d\delta} I(P\circ M') = (\det M)^{\frac{d\delta}{N+1}} I(P).$$

Fait : le discriminant $\mathrm{Disc}_{N,d}$ est un invariant de degré $(N+1)(d-1)^N$.

Base d'invariants

Base d'invariants

Les invariants déterminent-ils les polynômes homogènes de discriminant non nul à SL-équivalence près ?

Base d'invariants

Les invariants déterminent-ils les polynômes homogènes de discriminant non nul à SL-équivalence près ?

Théorème : Soient N, d deux entiers, et notons

$$q(N,d) := \binom{N+d}{d} - (N+1)^2 \in \mathbb{Z}.$$

Base d'invariants

Les invariants déterminent-ils les polynômes homogènes de discriminant non nul à SL-équivalence près ?

Théorème : Soient N, d deux entiers, et notons

$$q(N,d) := \binom{N+d}{d} - (N+1)^2 \in \mathbb{Z}.$$

Si $q(N,d) \leq 0$, alors tous les polynômes homogènes de degré d et de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Base d'invariants

Les invariants déterminent-ils les polynômes homogènes de discriminant non nul à SL-équivalence près ?

Théorème : Soient N, d deux entiers, et notons

$$q(N,d) := \binom{N+d}{d} - (N+1)^2 \in \mathbb{Z}.$$

Si $q(N,d) \leq 0$, alors tous les polynômes homogènes de degré d et de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $q(N,d) \geq 1$, il existe un entier δ et $q(N,d)+1$ invariants $I_0, \ldots, I_{q(N,d)}$ de degré δ dans $A_{N,d}$ tels que pour tout polynôme homogène P de degré d et de discriminant non nul, au moins un des $I_k(P)$ est non nul ;

Base d'invariants

Les invariants déterminent-ils les polynômes homogènes de discriminant non nul à SL-équivalence près ?

Théorème : Soient N, d deux entiers, et notons

$$q(N,d) := \binom{N+d}{d} - (N+1)^2 \in \mathbb{Z}.$$

Si $q(N,d) \leq 0$, alors tous les polynômes homogènes de degré d et de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $q(N,d) \geq 1$, il existe un entier δ et $q(N,d)+1$ invariants $I_0, \dots, I_{q(N,d)}$ de degré δ dans $A_{N,d}$ tels que pour tout polynôme homogène P de degré d et de discriminant non nul, au moins un des $I_k(P)$ est non nul ; et tels que pour tout couple (P, P') de tels polynômes homogènes de discriminant non nul, si

$$[I_0(P') : \dots : I_{q(N,d)}(P')] = [I_0(P) : \dots : I_{q(N,d)}(P)] \in \mathbb{P}^{q(N,d)}(\mathbb{C}),$$

alors P et P' sont GL-équivalents.

Base d'invariants

Les invariants déterminent-ils les polynômes homogènes de discriminant non nul à SL-équivalence près ?

Théorème : Soient N, d deux entiers, et notons

$$q(N,d) := \binom{N+d}{d} - (N+1)^2 \in \mathbb{Z}.$$

Si $q(N,d) \leq 0$, alors tous les polynômes homogènes de degré d et de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $q(N,d) \geq 1$, il existe un entier δ et $q(N,d)+1$ invariants $I_0, \ldots, I_{q(N,d)}$ de degré δ dans $A_{N,d}$ tels que pour tout polynôme homogène P de degré d et de discriminant non nul, au moins un des $I_k(P)$ est non nul ; et tels que pour tout couple (P, P') de tels polynômes homogènes de discriminant non nul, si

$$[I_0(P') : \ldots : I_{q(N,d)}(P')] = [I_0(P) : \ldots : I_{q(N,d)}(P)] \in \mathbb{P}^{q(N,d)}(\mathbb{C}),$$

alors P et P' sont GL-équivalents. En d'autres termes, si $(I_0(P'), \ldots, I_{q(N,d)}(P')) = (I_0(P), \ldots, I_{q(N,d)}(P))$, alors il existe une racine δ-ième de l'unité ξ telle que P' est SL-équivalent à ξP.

Cas où $q(N, d) \leq 0$

Cas où $q(N,d) \leq 0$

Il y a trois cas où $q(N,d) \leq 0$, et tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Cas où $q(N,d) \leq 0$

Il y a trois cas où $q(N,d) \leq 0$, et tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $d = 1$, alors $q(N,1) = -N(N+1) < 0$, et les polynômes non nuls homogènes de degré d sont les formes linéaires sur $\mathbb{C}^{N+1}$, donc ils sont tous GL-équivalents.

Cas où $q(N,d) \leq 0$

Il y a trois cas où $q(N,d) \leq 0$, et tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $d=1$, alors $q(N,1) = -N(N+1) < 0$, et les polynômes non nuls homogènes de degré d sont les formes linéaires sur $\mathbb{C}^{N+1}$, donc ils sont tous GL-équivalents.

Si $d=2$, alors $q(N,2) = -\frac{N(N+1)}{2} < 0$, et un polynôme homogène P est une forme quadratique qu'on écrit sous forme matricielle $P = {}^tXAX$, où X est le vecteur colonne de coordonnées $(x_0, \ldots, x_N)$ et A est une matrice symétrique.

Cas où $q(N,d) \leq 0$

Il y a trois cas où $q(N,d) \leq 0$, et tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $d = 1$, alors $q(N,1) = -N(N+1) < 0$, et les polynômes non nuls homogènes de degré d sont les formes linéaires sur $\mathbb{C}^{N+1}$, donc ils sont tous GL-équivalents.

Si $d = 2$, alors $q(N,2) = -\frac{N(N+1)}{2} < 0$, et un polynôme homogène P est une forme quadratique qu'on écrit sous forme matricielle $P = {}^tXAX$, où X est le vecteur colonne de coordonnées $(x_0, \ldots, x_N)$ et A est une matrice symétrique. Si $\mathrm{Disc}_{N,2}(P)$ est non nul, cette matrice est inversible, donc il existe une matrice symétrique inversible M telle que $M^{-2} = A$.

Cas où $q(N,d) \leq 0$

Il y a trois cas où $q(N,d) \leq 0$, et tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $d = 1$, alors $q(N,1) = -N(N+1) < 0$, et les polynômes non nuls homogènes de degré d sont les formes linéaires sur $\mathbb{C}^{N+1}$, donc ils sont tous GL-équivalents.

Si $d = 2$, alors $q(N,2) = -\frac{N(N+1)}{2} < 0$, et un polynôme homogène P est une forme quadratique qu'on écrit sous forme matricielle $P = {}^tXAX$, où X est le vecteur colonne de coordonnées $(x_0, \ldots, x_N)$ et A est une matrice symétrique. Si $\mathrm{Disc}_{N,2}(P)$ est non nul, cette matrice est inversible, donc il existe une matrice symétrique inversible M telle que $M^{-2} = A$. On a donc :

$$P \circ M = {}^t(MX)A(MX) = {}^tX({}^tMAM)X = {}^tXX.$$

Donc tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Cas où $q(N,d) \leq 0$

Il y a trois cas où $q(N,d) \leq 0$, et tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $d = 1$, alors $q(N,1) = -N(N+1) < 0$, et les polynômes non nuls homogènes de degré d sont les formes linéaires sur $\mathbb{C}^{N+1}$, donc ils sont tous GL-équivalents.

Si $d = 2$, alors $q(N,2) = -\frac{N(N+1)}{2} < 0$, et un polynôme homogène P est une forme quadratique qu'on écrit sous forme matricielle $P = {}^tXAX$, où X est le vecteur colonne de coordonnées $(x_0, \dots, x_N)$ et A est une matrice symétrique. Si $\mathrm{Disc}_{N,2}(P)$ est non nul, cette matrice est inversible, donc il existe une matrice symétrique inversible M telle que $M^{-2} = A$. On a donc :

$$P \circ M = {}^t(MX)A(MX) = {}^tX({}^tMAM)X = {}^tXX.$$

Donc tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $N = 1$ et $d = 3$, alors $q(1,3) = 0$.

Cas où $q(N,d) \leq 0$

Il y a trois cas où $q(N,d) \leq 0$, et tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $d = 1$, alors $q(N,1) = -N(N+1) < 0$, et les polynômes non nuls homogènes de degré d sont les formes linéaires sur $\mathbb{C}^{N+1}$, donc ils sont tous GL-équivalents.

Si $d = 2$, alors $q(N,2) = -\frac{N(N+1)}{2} < 0$, et un polynôme homogène P est une forme quadratique qu'on écrit sous forme matricielle $P = {}^tXAX$, où X est le vecteur colonne de coordonnées $(x_0, \dots, x_N)$ et A est une matrice symétrique. Si $\mathrm{Disc}_{N,2}(P)$ est non nul, cette matrice est inversible, donc il existe une matrice symétrique inversible M telle que $M^{-2} = A$. On a donc :

$$P \circ M = {}^t(MX)A(MX) = {}^tX({}^tMAM)X = {}^tXX.$$

Donc tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $N = 1$ et $d = 3$, alors $q(1,3) = 0$. Pour tout triplet de points distincts (x, x', x'') dans $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^3$, il existe une matrice dans $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}}$ envoyant x sur $[0:1]$, x' sur $[1:1]$ et x'' sur $[1:0]$.

Cas où $q(N,d) \leq 0$

Il y a trois cas où $q(N,d) \leq 0$, et tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $d = 1$, alors $q(N,1) = -N(N+1) < 0$, et les polynômes non nuls homogènes de degré d sont les formes linéaires sur $\mathbb{C}^{N+1}$, donc ils sont tous GL-équivalents.

Si $d = 2$, alors $q(N,2) = -\frac{N(N+1)}{2} < 0$, et un polynôme homogène P est une forme quadratique qu'on écrit sous forme matricielle $P = {}^tXAX$, où X est le vecteur colonne de coordonnées $(x_0, \dots, x_N)$ et A est une matrice symétrique. Si $\mathrm{Disc}_{N,2}(P)$ est non nul, cette matrice est inversible, donc il existe une matrice symétrique inversible M telle que $M^{-2} = A$. On a donc :

$$P \circ M = {}^t(MX)A(MX) = {}^tX({}^tMAM)X = {}^tXX.$$

Donc tous les polynômes homogènes de discriminant non nul sont GL-équivalents.

Si $N = 1$ et $d = 3$, alors $q(1,3) = 0$. Pour tout triplet de points distincts (x, x', x'') dans $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^3$, il existe une matrice dans $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}}$ envoyant x sur $[0:1]$, x' sur $[1:1]$ et x'' sur $[1:0]$. Donc pour tout couple (P, P') de polynômes homogènes de discriminant non nul, il existe une matrice envoyant les racines de P' sur celles de P, donc P et P' sont GL-équivalents.

Exemple de base d'invariants

Exemple de base d'invariants

Si $N = 1$ et $d = 4$, les polynômes homogènes sont de la forme

$$P(X_0, X_1) = a_{4,0}X_0^4 + a_{3,1}X_0^3X_1 + a_{2,2}X_0^2X_1^2 + a_{1,3}X_0X_1^3 + a_{0,4}X_1^4.$$

Exemple de base d'invariants

Si $N = 1$ et $d = 4$, les polynômes homogènes sont de la forme

$$P(X_0, X_1) = a_{4,0}X_0^4 + a_{3,1}X_0^3X_1 + a_{2,2}X_0^2X_1^2 + a_{1,3}X_0X_1^3 + a_{0,4}X_1^4.$$

Ces polynômes admettent un invariant de degré 2 :

$$S(P) := a_{4,0}a_{0,4} - 4a_{3,1}a_{1,3} + 3a_{2,2}^2,$$

et un invariant de degré 3, le catalecticant :

$$T(P) := a_{4,0}a_{2,2}a_{0,4} - a_{4,0}a_{1,3}^2 - a_{3,1}^2a_{0,4} + 2a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,2}^3.$$

Exemple de base d'invariants

Si $N = 1$ et $d = 4$, les polynômes homogènes sont de la forme

$$P(X_0, X_1) = a_{4,0}X_0^4 + a_{3,1}X_0^3X_1 + a_{2,2}X_0^2X_1^2 + a_{1,3}X_0X_1^3 + a_{0,4}X_1^4.$$

Ces polynômes admettent un invariant de degré 2 :

$$S(P) := a_{4,0}a_{0,4} - 4a_{3,1}a_{1,3} + 3a_{2,2}^2,$$

et un invariant de degré 3, le catalecticant :

$$T(P) := a_{4,0}a_{2,2}a_{0,4} - a_{4,0}a_{1,3}^2 - a_{3,1}^2a_{0,4} + 2a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,2}^3.$$

On a $q(1,4) = \binom{5}{4} - 2^2 = 1$, et une base d'invariants de degré $\delta := 6$ est donnée par

$$I_0 := S^3, \quad \text{et} \quad I_1 := T^2.$$

Exemple de base d'invariants

Si $N = 1$ et $d = 4$, les polynômes homogènes sont de la forme

$$P(X_0, X_1) = a_{4,0}X_0^4 + a_{3,1}X_0^3X_1 + a_{2,2}X_0^2X_1^2 + a_{1,3}X_0X_1^3 + a_{0,4}X_1^4.$$

Ces polynômes admettent un invariant de degré 2 :

$$S(P) := a_{4,0}a_{0,4} - 4a_{3,1}a_{1,3} + 3a_{2,2}^2,$$

et un invariant de degré 3, le catalecticant :

$$T(P) := a_{4,0}a_{2,2}a_{0,4} - a_{4,0}a_{1,3}^2 - a_{3,1}^2a_{0,4} + 2a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,2}^3.$$

On a $q(1,4) = \binom{5}{4} - 2^2 = 1$, et une base d'invariants de degré $\delta := 6$ est donnée par

$$I_0 := S^3, \quad \text{et} \quad I_1 := T^2.$$

On a aussi que le discriminant s'écrit, à une constante près :

$$\mathrm{Disc}_{1,4} = S^3 - 27\,T^2.$$

V. Le cas arithmétique

Théorème de Jordan

Théorème de Jordan

On dit que deux polynômes homogènes P et P' dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ sont SL-équivalents sur $\mathbb{Z}$ s'il existe une matrice M dans $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{Z}}$ telle que $P' = P \circ M$.

Théorème de Jordan

On dit que deux polynômes homogènes P et P' dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ sont SL-équivalents sur $\mathbb{Z}$ s'il existe une matrice M dans $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{Z}}$ telle que $P' = P \circ M$.

Théorème (Jordan, 1880) : Soient $N \geq 1$, $d \geq 3$ des entiers, et soit P un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ de discriminant non nul. Il existe un ensemble fini (peut-être vide) de polynômes homogènes $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout Q dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

Théorème de Jordan

On dit que deux polynômes homogènes P et P' dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ sont SL-équivalents sur $\mathbb{Z}$ s'il existe une matrice M dans $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{Z}}$ telle que $P' = P \circ M$.

Théorème (Jordan, 1880) : Soient $N \geq 1$, $d \geq 3$ des entiers, et soit P un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ de discriminant non nul. Il existe un ensemble fini (peut-être vide) de polynômes homogènes $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout Q dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{C}$ à P,

Théorème de Jordan

On dit que deux polynômes homogènes P et P' dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ sont SL-équivalents sur $\mathbb{Z}$ s'il existe une matrice M dans $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{Z}}$ telle que $P' = P \circ M$.

Théorème (Jordan, 1880) : Soient $N \geq 1$, $d \geq 3$ des entiers, et soit P un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ de discriminant non nul. Il existe un ensemble fini (peut-être vide) de polynômes homogènes $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout Q dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{C}$ à P,
2. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{Z}$ à l'un des Q_i.

Théorème de Jordan

On dit que deux polynômes homogènes P et P' dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ sont SL-équivalents sur $\mathbb{Z}$ s'il existe une matrice M dans $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{Z}}$ telle que $P' = P \circ M$.

Théorème (Jordan, 1880) : Soient $N \geq 1$, $d \geq 3$ des entiers, et soit P un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ de discriminant non nul. Il existe un ensemble fini (peut-être vide) de polynômes homogènes $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout Q dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{C}$ à P,
2. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{Z}$ à l'un des Q_i.

En particulier, si $q(N, d) \geq 1$, si $(I_0, \ldots, I_q)$ est une base d'invariants de degré δ, et si P est un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ de discriminant non nul, alors il existe un ensemble fini de polynômes $\{Q_1, \ldots, Q_s\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout Q dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

Théorème de Jordan

On dit que deux polynômes homogènes P et P' dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ sont SL-équivalents sur $\mathbb{Z}$ s'il existe une matrice M dans $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{Z}}$ telle que $P' = P \circ M$.

Théorème (Jordan, 1880) : Soient $N \geq 1$, $d \geq 3$ des entiers, et soit P un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ de discriminant non nul. Il existe un ensemble fini (peut-être vide) de polynômes homogènes $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout Q dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{C}$ à P,
2. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{Z}$ à l'un des Q_i.

En particulier, si $q(N,d) \geq 1$, si $(I_0, \ldots, I_q)$ est une base d'invariants de degré δ, et si P est un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ de discriminant non nul, alors il existe un ensemble fini de polynômes $\{Q_1, \ldots, Q_s\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout Q dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. On a l'égalité $(I_0(Q), \ldots, I_{q(N,d)}(Q)) = (I_0(P), \ldots, I_{q(N,d)}(P))$,

Théorème de Jordan

On dit que deux polynômes homogènes P et P' dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ sont SL-équivalents sur $\mathbb{Z}$ s'il existe une matrice M dans $\mathrm{SL}_{N+1,\mathbb{Z}}$ telle que $P' = P \circ M$.

Théorème (Jordan, 1880) : Soient $N \geq 1$, $d \geq 3$ des entiers, et soit P un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ de discriminant non nul. Il existe un ensemble fini (peut-être vide) de polynômes homogènes $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout Q dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{C}$ à P,
2. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{Z}$ à l'un des Q_i.

En particulier, si $q(N,d) \geq 1$, si $(I_0, \ldots, I_q)$ est une base d'invariants de degré δ, et si P est un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]_d$ de discriminant non nul, alors il existe un ensemble fini de polynômes $\{Q_1, \ldots, Q_s\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout Q dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. On a l'égalité $(I_0(Q), \ldots, I_{q(N,d)}(Q)) = (I_0(P), \ldots, I_{q(N,d)}(P))$,
2. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{Z}$ à l'un des Q_i.

Discriminant arithmétique et conjecture de finitude

Discriminant arithmétique et conjecture de finitude

A-t-on besoin de tous les invariants pour avoir une telle propriété de finitude ?

Discriminant arithmétique et conjecture de finitude

A-t-on besoin de tous les invariants pour avoir une telle propriété de finitude ?

Pour tous N, d, le discriminant $\mathrm{Disc}_{N,d}$ dans

$$A_{N,d} = \mathbb{C}\left[\{T_{k_0,\dots,k_N}, (k_0,\dots,k_N) \in I_{N,d}\}\right]$$

est défini à une constante non nulle près.

Discriminant arithmétique et conjecture de finitude

A-t-on besoin de tous les invariants pour avoir une telle propriété de finitude ?

Pour tous N, d, le discriminant $\mathrm{Disc}_{N,d}$ dans

$$A_{N,d} = \mathbb{C}\big[\{T_{k_0,\dots,k_N}, (k_0,\dots,k_N) \in I_{N,d}\}\big]$$

est défini à une constante non nulle près.

Il est possible de choisir cette constante de manière à ce que les coefficients de $\mathrm{Disc}_{N,d}$ soient entiers et premiers entre eux dans leur ensemble.

Discriminant arithmétique et conjecture de finitude

A-t-on besoin de tous les invariants pour avoir une telle propriété de finitude ?

Pour tous N, d, le discriminant $\mathrm{Disc}_{N,d}$ dans

$$A_{N,d} = \mathbb{C}\big[\{T_{k_0,\ldots,k_N}, (k_0,\ldots,k_N) \in I_{N,d}\}\big]$$

est défini à une constante non nulle près.

Il est possible de choisir cette constante de manière à ce que les coefficients de $\mathrm{Disc}_{N,d}$ soient entiers et premiers entre eux dans leur ensemble. On obtient ainsi le discriminant arithmétique :

$$\mathrm{Disc}_{N,d} \quad \in A_{N,d,\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}\big[\{T_{k_0,\ldots,k_N}, (k_0,\ldots,k_N) \in I_{N,d}\}\big],$$

défini au signe près.

Discriminant arithmétique et conjecture de finitude

A-t-on besoin de tous les invariants pour avoir une telle propriété de finitude ?

Pour tous N, d, le discriminant $\mathrm{Disc}_{N,d}$ dans

$$A_{N,d} = \mathbb{C}\big[\{T_{k_0,\dots,k_N}, (k_0,\dots,k_N) \in I_{N,d}\}\big]$$

est défini à une constante non nulle près.

Il est possible de choisir cette constante de manière à ce que les coefficients de $\mathrm{Disc}_{N,d}$ soient entiers et premiers entre eux dans leur ensemble. On obtient ainsi le discriminant arithmétique :

$$\mathrm{Disc}_{N,d} \quad \in A_{N,d,\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}\big[\{T_{k_0,\dots,k_N}, (k_0,\dots,k_N) \in I_{N,d}\}\big],$$

défini au signe près.

Conjecture : si $N \geq 1$ et $d \geq 3$ sont deux entiers et a est un entier relatif non nul, alors il existe un ensemble fini $\{Q_1,\dots,Q_r\}$ de polynômes homogènes dans $\mathbb{Z}[X_0,\dots,X_N]_d$ tels que, pour tout polynôme homogène Q dans $\mathbb{Z}[X_0,\dots,X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

Discriminant arithmétique et conjecture de finitude

A-t-on besoin de tous les invariants pour avoir une telle propriété de finitude ?

Pour tous N, d, le discriminant $\mathrm{Disc}_{N,d}$ dans

$$A_{N,d} = \mathbb{C}\big[\{T_{k_0,\ldots,k_N}, (k_0,\ldots,k_N) \in I_{N,d}\}\big]$$

est défini à une constante non nulle près.

Il est possible de choisir cette constante de manière à ce que les coefficients de $\mathrm{Disc}_{N,d}$ soient entiers et premiers entre eux dans leur ensemble. On obtient ainsi le discriminant arithmétique :

$$\mathrm{Disc}_{N,d} \quad \in A_{N,d,\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}\big[\{T_{k_0,\ldots,k_N}, (k_0,\ldots,k_N) \in I_{N,d}\}\big],$$

défini au signe près.

Conjecture : si $N \geq 1$ et $d \geq 3$ sont deux entiers et a est un entier relatif non nul, alors il existe un ensemble fini $\{Q_1,\ldots,Q_r\}$ de polynômes homogènes dans $\mathbb{Z}[X_0,\ldots,X_N]_d$ tels que, pour tout polynôme homogène Q dans $\mathbb{Z}[X_0,\ldots,X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. Le discriminant arithmétique $\mathrm{Disc}_{N,d}(Q)$ vaut a,

Discriminant arithmétique et conjecture de finitude

A-t-on besoin de tous les invariants pour avoir une telle propriété de finitude ?

Pour tous N, d, le discriminant $\mathrm{Disc}_{N,d}$ dans

$$A_{N,d} = \mathbb{C}\big[\{T_{k_0,\dots,k_N}, (k_0,\dots,k_N) \in I_{N,d}\}\big]$$

est défini à une constante non nulle près.

Il est possible de choisir cette constante de manière à ce que les coefficients de $\mathrm{Disc}_{N,d}$ soient entiers et premiers entre eux dans leur ensemble. On obtient ainsi le discriminant arithmétique :

$$\mathrm{Disc}_{N,d} \quad \in A_{N,d,\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}\big[\{T_{k_0,\dots,k_N}, (k_0,\dots,k_N) \in I_{N,d}\}\big],$$

défini au signe près.

Conjecture : si $N \geq 1$ et $d \geq 3$ sont deux entiers et a est un entier relatif non nul, alors il existe un ensemble fini $\{Q_1,\dots,Q_r\}$ de polynômes homogènes dans $\mathbb{Z}[X_0,\dots,X_N]_d$ tels que, pour tout polynôme homogène Q dans $\mathbb{Z}[X_0,\dots,X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. Le discriminant arithmétique $\mathrm{Disc}_{N,d}(Q)$ vaut a,
2. Le polynôme Q est SL-équivalent sur $\mathbb{Z}$ à l'un des Q_i.

Conjecture de Shafarevich et théorème de Lawrence et Venkatesh

Conjecture de Shafarevich et théorème de Lawrence et Venkatesh

La conjecture de finitude découle de la conjecture suivante :

Conjecture de Shafarevich et théorème de Lawrence et Venkatesh

La conjecture de finitude découle de la conjecture suivante :

Conjecture (de Shafarevich pour les hypersurfaces projectives) : Soit $\{p_1, \ldots, p_m\}$ un ensemble fini de nombres premiers.

Conjecture de Shafarevich et théorème de Lawrence et Venkatesh

La conjecture de finitude découle de la conjecture suivante :

Conjecture (de Shafarevich pour les hypersurfaces projectives) : Soit $\{p_1, \ldots, p_m\}$ un ensemble fini de nombres premiers. Il existe un ensemble fini de polynômes homogènes $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

Conjecture de Shafarevich et théorème de Lawrence et Venkatesh

La conjecture de finitude découle de la conjecture suivante :

Conjecture (de Shafarevich pour les hypersurfaces projectives) : Soit $\{p_1, \ldots, p_m\}$ un ensemble fini de nombres premiers. Il existe un ensemble fini de polynômes homogènes $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. Le discriminant arithmétique $\mathrm{Disc}_{N,d}(P)$ s'écrit (au signe près) comme un produit de puissances des premiers p_j,

Conjecture de Shafarevich et théorème de Lawrence et Venkatesh

La conjecture de finitude découle de la conjecture suivante :

Conjecture (de Shafarevich pour les hypersurfaces projectives) : Soit $\{p_1, \ldots, p_m\}$ un ensemble fini de nombres premiers. Il existe un ensemble fini de polynômes homogènes $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. Le discriminant arithmétique $\mathrm{Disc}_{N,d}(P)$ s'écrit (au signe près) comme un produit de puissances des premiers p_j,
2. Le polynôme P est GL-équivalent sur $\mathbb{Q}$ à un polynôme de la forme $u\,Q_i$, où u est un nombre rationnel non nul et $1 \leq i \leq r$ est un entier.

Conjecture de Shafarevich et théorème de Lawrence et Venkatesh

La conjecture de finitude découle de la conjecture suivante :

Conjecture (de Shafarevich pour les hypersurfaces projectives) : Soit $\{p_1, \ldots, p_m\}$ un ensemble fini de nombres premiers. Il existe un ensemble fini de polynômes homogènes $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$ tels que pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_N]_d$, les affirmations suivantes soient équivalentes :

1. Le discriminant arithmétique $\mathrm{Disc}_{N,d}(P)$ s'écrit (au signe près) comme un produit de puissances des premiers p_j,
2. Le polynôme P est GL-équivalent sur $\mathbb{Q}$ à un polynôme de la forme $u\,Q_i$, où u est un nombre rationnel non nul et $1 \leq i \leq r$ est un entier.

Théorème (Lawrence, Venkatesh, 2020) : Il existe un entier $N_0 \geq 1$ et une fonction $d_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tels que pour tous N et d tels que $N \geq N_0$ et $d \geq d_0(N)$, et pour tout ensemble fini de premiers $\{p_1, \ldots, p_m\}$, il existe un polynôme homogène F non nul de $A_{N,d,\mathbb{Z}}$ tel que, pour tout polynôme homogène P dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots X_N]_d$ dont le discriminant $\mathrm{Disc}_{N,d}(P)$ s'écrit (au signe près) comme un produit de puissances des premiers p_j, $F(P)$ s'annule.