CV de Guy DAVID

Dernière mise à jour partielle: 2015.

Né le 1er Juin 1957, à St OMER (62), Marié, 1 enfant

Grade : Professeur (classe exceptionnelle)

Etablissement d'affectation: Université de Paris Sud 11 (centre d'Orsay)

Section de CNU : 25

Unité de recherche d'appartenance: Laboratoire de Mathématique, UMR 8628, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex

Adresse électronique: guy.david@math.u-psud.fr

Page web : http://www.math.u-psud.fr/∼ gdavid/

Etudes, diplômes, distinctions

1976-81 : Elève à l'E.N.S., rue d'Ulm ; agrégation et DEA de Mathématiques

1981 : Thèse de 3ème Cycle à Paris XI (Directeur Y. Meyer)

1986 : Thèse d'Etat à Paris XI (Directeur Y. Meyer) : Noyau de Cauchy et opérateurs de Calderón-Zygmund

1986 : Conférencier invité, ICM Berkeley

1987 : Prix Salem (partagé avec J-L. Journé)

1990 : Prix IBM-France

1996-2001 : Membre junior de l'Institut Universitaire de France

1997 : Prix Institut Henri Poincaré Gauthier-Villars, Analyse non linéaire, avec S. Semmes

1999 : Foreign honorary member, American Academy of arts and sciences

2001 : Médaille d'argent du CNRS

2004 : Prix Ferran Sunyer y Balaguer pour le livre "Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional"

2004 : Grand prix Servant de l'Académie des Sciences

2010–2015 : Membre senior de l'Institut Universitaire de France.

Emplois

Août 81- Août 82 : Service National

Sept. 82-Sept. 89 : Attaché de recherche, puis CR1 au C.N.R.S ; Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique

Depuis Sept. 89 : Professeur, Université Paris-11 (Orsay). 1ère classe en 91, CE en 2001.

Responsabilités administratives (un peu dans le désordre)

Depuis 1990 (±1 an) : membre de la commission de spécialistes, puis de la CCSU à Orsay

2001-09 (±1 an), membre extérieur à Caen et l'ENS Cachan

1990-95 : responsable du DEA de mathématiques pures (Orsay)

1995-97 : responsable du magistère de mathématiques (Orsay)

Octobre-décembre 99 : co-organisation partielle d'un trimestre sur le traitement d'images à l'IHP (mais j'en ai fait très peu)

Mars 2000-Février 2005 : directeur de l'équipe d'analyse harmonique (dans l'UMR 8628) et du conseil de laboratoire de maths

De 2000 à 2004: membre du conseil scientifique du CIRM

De 2001 à 2003, responsable de la licence de Math. fondamentales, Orsay

Depuis 2002, membre du comité de rédaction de la revue Astérisque

Co-organisation du colloque en l'honneur de Ronald Coifman et Yves Meyer, juin 2003

Janvier 2005-Janvier 2007, directeur du laboratoire de mathématique d'Orsay

Janvier 2007-2009, "directeur des ressources humaines" à Orsay (réciproque de l'échange avec Pascal Massart)

Editeur pour la Revista Matematica Iberoamericana

Directeur de l'équipe d'Analyse harmonique, dans le passé et depuis 2010, Labo de math. d'Orsay

depuis 2014, Membre du "Scientific Advisory Board for the Finnish Center of Excellence in Analysis and Dynamics".

Depuis Septembre 2015, vice-président enseignement du département de mathématiques d'Orsay.

ACTIVITE EXERCÉES DURANT LES 4 DERNIÈRES ANNÉES

1. Publications et production scientifique

Publications:

J'ai mis en italique les deux articles de présentation et mis des étoiles à mes papiers préférés.

LISTE DE PUBLICATIONS

Pardon, je mets une liste presque complète, mais pour faciliter j'ai mis en italique les exposés, articles de revue, et notes aux CRAS sans vrai résultat nouveau (il reste 38 titres acceptés). Les livres et gros articles sont soulignés. Enfin j'ai marqué d'une étoile 11 papiers préférés.

[**1**] Courbes corde-arc et espaces de Hardy généralisés, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 32 (1982), no. 3, xi, 227–239.

[**2**] *Commutateurs de Calderón et lemme de Cotlar, Séminaire d'analyse harmonique 1981–1982, 59–73, Publ. Math. Orsay 83, 2, Univ. Paris XI, Orsay, 1983.*

[**3**] avec Ronald Coifman and Yves Meyer, La solution des conjecture de Calderón, Adv. in Math. 48 (1983), no. 2, 144–148.

[**4**] *avec Jean-Lin Journé, Une caractérisation des opérateurs intégraux singuliers bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), no. 18, 761–764.*

[**5**∗] Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 17 (1984), no. 1, 157–189.

[**6**∗] avec Jean-Lin Journé, A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, Ann. of Math. (2) 120 (1984), no. 2, 371–397.

[**7**] avec Jean-Lin Journé et Stephen Semmes, Oprateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), no. 4, 1–56.

[**8**] avec Stephen Semmes, L'opérateur défini par v.p. $\int \left|\frac{(A(x)-A(y)}{(x-y)}\right| \frac{f(y)}{(x-y)}\,dy$ est borné sur $L^2(\mathbb{R})$ lorsque A est lipschitzienne, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303 (1986), no. 11, 499–502.

[**9**] Une minoration de la norme de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens, Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1987), no. 2, 741–750.

[**10**] *Solutions de l'équation de Beltrami, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles 1986–1987, Exp. No. VIII, 8 pp., École Polytech., Palaiseau, 1987.*

[**11**] *Opérateurs de Calderón-Zygmund, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 890–899, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.*

[**12**] Opérateurs d'intégrale singulière sur les surfaces régulières, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 21 (1988), no. 2, 225–258.

[**13**] Solutions de l'équation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 13 (1988), no. 1, 25–70.

[**14**∗] Morceaux de graphes lipschitziens et intégrales singulières sur une surface, Rev. Mat. Iberoamericana 4 (1988), no. 1, 73–114.

[**15**] avec Carlos Tomei, The problem of the calissons, Amer. Math. Monthly 96 (1989), no. 5, 429–431.

[**16**] avec Ronald Coifman et Stephen Semmes, ω-Calderón-Zygmund operators, Harmonic analysis and partial differential equations (El Escorial, 1987), 132–145, Lecture Notes in Math., 1384, Springer, Berlin, 1989.

[**17**] *Singular integrals on surfaces, Harmonic analysis and partial differential equations (El Escorial, 1987), 159–167, Lecture Notes in Math., 1384, Springer, Berlin, 1989.*

[**18**] avec Stephen Semmes, Strong A_∞ weights, Sobolev inequalities and quasiconformal mappings, Analysis and partial differential equations, 101–111, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 122, Dekker, New York, 1990.

[**19**] avec Dan Voiculescu, s-numbers of singular integrals for the invariance of absolutely continuous spectra in fractional dimensions, J. Funct. Anal. 94 (1990), no. 1, 14–26.

[20] avec David Jerison, Lipschitz approximation to hypersurfaces, harmonic measure, and singular integrals, Indiana Univ. Math. J. 39 (1990), no. 3, 831–845.

[21] *Une nouvelle démonstration du théorème $T(b)$, d'après Coifman et Semmes, Les ondelettes en 1989 (Orsay, 1989), 39–50, 200–201, Lecture Notes in Math., 1438, Springer, Berlin, 1990.*

[22] avec Gaven Martin and Stephen Semmes, Médiatrice de deux arcs de quasicercle, J. d'Analyse Math. 55 (1990), 250–270.

[23] *Intégrales singulières et régularité des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, Séminaire d'Analyse Harmonique. Année 1989/90, 18–36, Univ. Paris XI, Orsay, 1990.*

[24] *avec Stephen Semmes, Harmonic analysis and the geometry of subsets of $\mathbb{R}^n$, Conference on Mathematical Analysis (El Escorial, 1989), Publ. Mat. 35 (1991), no. 1, 237–249.*

[25∗] avec Stephen Semmes, Singular integrals and rectifiable sets in $\mathbb{R}^n$: au-delà des gra--phes lipschitziens, Astérisque No. 193 (1991), 152 pp.

[26] Wavelets and singular integrals on curves and surfaces, Lecture Notes in Mathematics 1465, Springer-Verlag, Berlin, 1991. x+107 pp.

[27] *Rectifiabilité quantifiée et le problème du voyageur de commerce, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1990–1991, Exp. No. XIV, 10 pp., École Polytech., Palaiseau, 1991.*

[28] avec Stephen Semmes, Quantitative rectifiability and Lipschitz mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 337 (1993), no. 2, 855–889.

[29∗] avec Stephen Semmes, Analysis of and on uniformly rectifiable sets, Mathematical Surveys and Monographs 38, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. xii+356 pp.

[30] *avec Stephen Semmes, On a variational problem from image processing, Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993). J. Fourier Anal. Appl. 1995, Special Issue, 161–187.*

[31] avec Stephen Semmes, On the singular sets of minimizers of the Mumford-Shah functional, J. Math. Pures Appl. (9) 75 (1996), no. 4, 299–342.

[32] avec Stephen Semmes, Uniform rectifiability and singular sets, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13 (1996), no. 4, 383–443.

[33∗] C^1-arcs for minimizers of the Mumford-Shah functional, SIAM J. Appl. Math. 56 (1996), no. 3, 783–888.

[34] *avec Stephen Semmes, Surfaces quasiminimales de codimension 1 et domaines de John, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1995–1996, Exp. No. X, 19 pp., Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau, 1996.*

[35] *avec Stephen Semmes, Surfaces quasiminimales de codimension* 1*: un morceau de démonstration. Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Saint-Jean-de-Monts, 1996), Exp. No. IX, 18 pp., École Polytech., Palaiseau, 1996.*

[36] avec Stephen Semmes, Fractured fractals and broken dreams: Self-similar geometry

through metric and measure, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 7, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997. x+212 pp.

[**37**] avec Stephen Semmes, Quasiminimal surfaces of codimension 1 and John domains, Pacific J. Math. 183 (1998), no. 2, 213–277.

[**38**∗] Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity, Rev. Mat. Iberoamericana 14 (1998), no. 2, 369–479.

[**39**] *Analytic capacity, Calderón-Zygmund operators, and rectifiability, Publ. Mat. 43 (1999), no. 1, 3–25.*

[**40**] *Global minimizers of the Mumford-Shah functional, Current developments in mathematics, 1997 (Cambridge, MA), 219–224, Int. Press, Boston, MA, 1999.*

[**41**] avec Tatiana Toro, Reifenberg flat metric spaces, snowballs, and embeddings, Math. Ann. 315 (1999), no. 4, 641–710.

[**42**] *Analytic capacity, Cauchy kernel, Menger curvature, and rectifiability, Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996), 183–197, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1999.*

[**43**∗] avec Pertti Mattila, Removable sets for Lipschitz harmonic functions in the plane, Rev. Mat. Iberoamericana 16 (2000), no. 1, 137–215.

[**44**∗] avec Stephen Semmes, Uniform rectifiability and quasiminimizing sets of arbitrary codimension, Mem. Amer. Math. Soc. 144 (2000), no. 687, viii+132 pp.

[**45**] avec Stephen Semmes, Regular mappings between dimensions. Publ. Mat. 44 (2000), no. 2, 369–417.

[**46**] avec Carlos Kenig and Tatiana Toro, Asymptotically optimally doubling measures and Reifenberg flat sets with vanishing constant, Comm. Pure Appl. Math. 54 (2001), no. 4, 385–449.

[**47**] Des intégrales singulières bornées sur un ensemble de Cantor, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 332 (2001), no. 5, 391–396.

[**48**∗] with Alexis Bonnet, Cracktip is a global Mumford-Shah minimizer, Astérisque No. 274 (2001), vi+259 pp.

[**49**] Avec Jean-Christophe Léger, Monotonicity and separation for the Mumford-Shah problem, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 19 (2002), no. 5, 631–682.

[**50**] *Avec Jean-Christophe Léger, A vue d'oeil (article de vulgarisation sur la fonctionnelle de Mumford-Shah), Plein-Sud spécial recherche (2002)*

[**51**] Limits of Almgren quasiminimal sets, Harmonic analysis at Mount Holyoke (South Hadley, MA, 2001), 119–145, Contemp. Math., 320, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[**52**] Hausdorff dimension of uniformly non flat sets with topology, Publ. Mat. 48 (2004), 187-225.

[**53**∗] Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional, Progress in Mathematics 233, Birkhuser Verlag, Basel, 2005. xiv+581 pp.

[**54**] *Open questions on the Mumford-Shah functional. Perspectives in analysis, 37–49, Math. Phys. Stud., 27, Springer, Berlin, 2005.*

[55] Mumford-Shah minimizers on thin plates, Calculus of Variations and Partial Differential Equations 27 (2006), no. 2, 203–232.

[56] *Quasiminimal sets for Hausdorff measures, in Recent Developments in Nonlinear PDEs, Proceeding of the second symposium on analysis and PDEs (June 7-10, 2004), Purdue University, D. Danielli editor, 81–99, Contemp. Math. 439, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.*

[57] avec Thierry De Pauw and Tatiana Toro, A generalization of Reifenberg's Theorem in $\mathbb{R}^3$, Geometric And Functional Analysis 18 (2008), 1168-1235.

[58] *Uniform rectifiabillity, Notes d'un cours Park City (Utah) fait en juillet 2003, qui sera en principe publié un jour par l'AMS.Environ 53 pages.*

[59] Hölder regularity of two-dimensional almost-minimal sets in $\mathbb{R}^n$, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol 18, 1 (2009), 65–246.

[60] C^{1+a}-regularity for two-dimensional almost-minimal sets in $\mathbb{R}^n$, J. Geom. Anal. 20 (2010), no. 4, 837954.

[61∗] Avec T. Toro, Reifenberg parameterizations for sets with holes, Memoirs of the AMS, Vol. 215, Number 1012 (2012).

[62] Avec M. Snipes, A Non-Probabilistic Proof of the Assouad Embedding Theorem with Bounds on the Dimension, Analysis and Geometry in Metric Spaces, Volume 1 (2013), 36–41.

[63] Avec A. Daniilidis, E. Durand-Cartagena, et A. Lemenant, Rectifiability of self-contracted curves in the euclidean space and applications, Journal of Geometric Analysis (Nov. 2013) 10.1007/s12220-013-9464-z.

[64], *Regularity of Minimal and Almost Minimal Sets and Cones: J. Taylors Theorem for Beginners*, Centre de Recherches Mathématiques, Lecture notes of the 50th Séminaire de mathématiques supérieures, Montreal 2011, G. Dafni, R. Mc Cann, A. Stancu editors, CRM Proceedings and lecture notes, Volume 56, 2013, 67–117.

[65], *Should we solve Plateau's problem again?* Advances in Analysis: The Legacy of Elias M. Stein. Edited by Charles Fefferman, Alexandru D. Ionescu, D.H. Phong, and Stephen Wainger. Princeton University Press 2014, 108–145.

[66] Approximation of a Reifenberg-flat set by a smooth surface, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin 21 (2014), 319–338.

[67∗] Avec T. Toro, Regularity of almost minimizers with free boundary, 82p. Accepté, Calc. Var. and PDE.

[68] Avec J. Azzam et T. Toro, Wasserstein Distance and the Rectifiability of Doubling Measures: Part I, 85p. Accepté, Mathematische Annalen.

[69∗] Local regularity properties of almost- and quasiminimal sets with a sliding boundary condition, 342p., arXiv:1401.1179. Soumis.

[70∗] Avec M. Filoche, D. Jerison, et S. Mayboroda, A free boundary problem for the localization of eigenfunctions, 175p. arXiv:1406.6596. Soumis.

[71] Avec J. Azzam et T. Toro, Wasserstein Distance and the Rectifiability of Doubling Measures: Part II, 34p., arXiv:1411.251. Soumis.

[72] A monotonicity formula for minimal sets with a sliding boundary condition, 100p., arXiv:1408.7093. accepté, publicacion mathematiques.

[73] The effective confining potential of quantum states in disordered media, avec Doug Arnold, Marcel Filoche, David Jerison, and Svitlana Mayboroda, soumis à une revue de physique.

Les papiers non publiés sont aussi visibles sur la page http://www.math.u-psud.fr/ gdavid/.

Description rapide des résultats récents, et un peu du programme de recherche

Mon thème de recherche principal est l'étude des ensembles minimaux et presque minimaux, souvent en petites dimensions. Les résultats présentés ici sont surtout des résultats de régularité, mais ils doivent mener aussi, dans des cas assez particuliers, à des résultats d'existence.

Le cadre général est celui des ensembles presque minimaux d'Almgren ("restricted sets", dans son mémoire de l'AMS). C'est un cadre moins pratique que celui des courants minimiseurs de masse (le plus couramment utilisé), et en particulier les résultats d'existence y sont bien plus rares et parcellaires, mais c'est ce cadre qui donne la description la plus réaliste des films de savon. En particulier, les ensembles minimaux (je ne préciserai plus, au sens d'Almgren) de toutes dimensions peuvent avoir des singularités. Jean Taylor, dans un résultat célèbre, a prouvé que tout ensemble presque minimal de dimension 2 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$ est équivalent, au voisinage de chacun de ses point et par un homéomorphisme de classe $C^{1+\varepsilon}$, à un cône minimal. Pour ce choix de dimensions 2 et 3, il n'y a que 3 types de cônes minimaux: les plans, les Y (trois demi-plans bordés par une droite et qui y font un angle de 120 degrés), et les T (à rotation près, le cône sur l'union des faces d'un tétraèdre régulier). Le théorème de Taylor est très facile à illustrer: prendre une photo au hasard de films ou de bulles de savon; on y voit souvent les deux types de singularités (dans les bulles, les singulatités de type T sont aux points de contact entre trois régions captives, plus l'extérieur). J'avais généralisé ce résultat à des ensembles de dimension 2 dans $\mathbb{R}^n$, en changeant aussi un peu la preuve, mais dans ce cadre je ne sais parfois obtenir qu'une équivalence biHöldérienne (avec n'importe quel exposant < 1), et surtout on ne connaît pas encore la liste des cônes minimaux!

Je m'intéresse maintenant à la régularité au bord des ensembles minimaux ou presque minimaux. On se donne un ou plusieurs bords L_j dans $\mathbb{R}^n$ (pensez à des choses simples comme des surfaces régulières, et éventuellement ajouter comme L_0 un domaine fermé où l'on souhaite confiner les ensembles), et on définit des notions d'ensembles minimaux (ou presque minimaux, ou quasiminimaux, suivant les besoins) comme celles d'Almgren mais où les compétiteurs doivent respecter les frontières. Donnons quand même une idée des définitions. On mesure toujours la taille des ensembles avec la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^d$ (juste parce que $\mathcal{H}^d(E) \in [0, +\infty]$ est bien défini pour tout borélien E, et coincide avec la mesure de surface quand E est une surface d-dimensionnelle lisse), et modulo quelques petits détails, un ensemble minimal est un ensemble E tel que

$$\mathcal{H}^d(E \cap B) \leq \mathcal{H}^d(F \cap B) \tag{1}$$

pour tout compétiteur F de E, et où B est une grande boule hors de laquelle $F = E$. Un compétiteur est un ensemble de la forme $F = \varphi_1(E)$, où $\{\varphi_t\}$, $0 \leq t \leq 1$, est une famille à un paramètre d'applications continues qui, en plus des conditions naturelles habituelles ($\varphi_0(x) = x$, continuité en $x \in E$ et $t \in [0,1]$, et support compact pour $(x,t) \to \varphi_t(x) - x$), est telle que pour tout j,

$$\varphi_t(x) \in L_j \text{ pour } x \in E \cap L_j \text{ et } t \in [0,1].$$

Bref, les déformations préservent l'appartenance à chaque frontière L_j, mais autorisent à glisser le long de L_j. Pour simplifier la discussion, j'appellerai E un ensemble minimal glissant. Pour des ensembles presque minimaux (glissants), on ajoute au second membre de (1) une petite erreur $h(r)r^d$, où r est le rayon d'une boule hors de laquelle $\varphi_t(x) \equiv x$. Quasiminimal, et ses variantes, ont des définitions plus compliquées, mais aimablement invariantes par homéomorphismes bilipschitziens.

Dans le long papier [9] je reprends toutes les propriétés générales connues pour des ensembles minimaux, presque minimaux, ou quasiminimaux dans un ouvert, et j'essaie de les démontrer au bord aussi. Dans l'ensemble, il n'y a pas eu trop de mauvaises surprises autres que la longueur des démonstrations; quand même, je ne sais pas démontrer la rectifiabilité uniforme des ensembles quasiminimaux dans toutes les dimensions, mais heureusement la rectifiabilité simple reste vraie, et j'ai découvert avec surprise que sa démonstration suffit pour les théorèmes sur les limites. Le point principal qu'il faut retenir est sans doute le fait que la limite (pour la distance de Hausdorff locale) d'une suite d'ensembles E_k qui seraient minimaux, presque minimaux, ou quasiminimaux, avec des constantes fixes, est du même type et avec les mêmes constantes. Ceci utilise une idée de Dal Maso, Morel, Solimini, qui permet de démontrer la semicontinuité inférieure de $\mathcal{H}^d$, quand on la restreint à des suites d'ensembles qui vérifient uniformément une certaine propriété de concentration. Ce résultat pour les limites, plus la presque monotonie de la densité pour des boules centrées sur la frontière et avec des frontières presque côniques (qui se démontre presque comme à l'intérieur), permet au moins de commencer l'étude de la régularité au bord de nos ensembles par l'étude des limites par explosion et des cônes minimaux, comme c'est la tradition.

L'étape suivante du programme consistera à démontrer des théorèmes comme celui de Jean Taylor, mais à la frontière. Par exemple, on voudrait une description de E (minimal ou presque minimal), au voisinage d'un point du bord L_j, quand L_j est le seul bord et est une courbe lisse. C'est loin d'être compris, même conjecturalement, et j'essaierai d'avancer dans cette direction. En terme de Plateau et des films de savon, il s'agit de comprendre comment les films s'attachent à un fil de diamètre négligeable, et aussi comment la situation (plus facile à comprendre) des films attachés à un fil de petit diamètre évolue quand le diamètre tend vers 0. L'article [12] donne une première réponse, mais dans un cas particulier spécialement simple (si dans une boule, E ressemble beaucoup à un demi-plan) ou avec une réponse incomplète (quand il ressemble à un plan ou un V). On y utilise une nouvelle (je crois) formule de monotonie, qui n'est sans doute utile que dans très peu de cas, mais qui permet quand même d'obtenir une certaine uniformité dans les approximations de E par des cônes minimaux.

Une fois que ceci sera fait (si on y arrive, et donc en tout cas petites dimensions), les chances de démontrer de bons résultats d'existence seront excellentes, par une méthode de construction de suites minimisantes composées d'ensembles quasiminimaux initiée par

V. Feuvrier et basée sur la construction de grilles de ployèdres adaptés à un ensemble rectifiable. La méthode a été utilisée avec succès par Feuvrier (sans frontière), Liang (où la contrainte était sur l'homologie du complémentaire), puis Fang (pour le problème de Reifenberg; voir ci-dessous); le problème est surtout de prouver que la classe d'objets considérés est stable par limites de Hausdorff, et dans le cas de minimas glissants, la régularité au bord permettra de rétracter les éléments de la suite minimisantes sur la limite.

Signalons encore que les classes d'ensembles (presque, quasi) minimaux ci-dessus ont un intérêt hors de l'étude des minimiseurs glissants, puisque les supports de courants minimiseurs de taille (s'il en existe!), et les ensembles minimaux au sens de Reifenberg (il y en a, voir ci-dessous), sont des exemples d'ensembles minimaux comme ci-dessus. Donc les résultats dont il est question s'appliquent également dans ces autres cadres. Ces motivations sont un peu expliqués dans [5], alors que [4] se concentrait plutôt sur une description des résultats.

Passons à l'étude de certaines <u>frontières libres</u> (les papiers [7] et [10]). On a commencé à se demander, avec Tatiana Toro, si les résultats de Alt, Caffarelli, et Friedman, concernant la régularité de certaines frontières libres, sont encore valables pour des fonctions u qui seraient seulement presque minimales. En deux mots, et pour le problème à deux phases, on se donne deux fonctions bornées q_+ et q_-, et on dit que u est presque minimale si $u \in W^{1,2}_{loc}$ (si u a localement une dérivée dans L^2) et si

$$\begin{aligned}(2)\quad &\int_{B(x,r)} \Big\{|\nabla u(y)|^2 + q_+(y)^2\mathbf{1}_{u(y)>0} + q_-(y)^2\mathbf{1}_{u(y)>0}\Big\}dy \\ &\qquad\qquad \leq (1+Cr^n)\int_{B(x,r)} \Big\{|\nabla v(y)|^2 + q_+(y)\mathbf{1}_{v(y)>0} + q_-(y)\mathbf{1}_{v(y)>0}\Big\}dy\end{aligned}$$

pour toute autre fonction $v \in W^{1,2}_{loc}$ qui coincide avec u hors d'une boule $B(x,r)$. Pour le problème à une phase, on se contente de fonctions positives, et on oublie q_- dans (2).

Le problème initial d'Alt, Caffarelli, et Friedman correspond à $C = 0$ (pas de terme d'erreur), et depuis beaucoup de variantes ont été étudiées par divers auteurs, correspondant souvent à de petites variations sur l'opérateur principal (ici, le Laplacien qui correspond à l'énergie $\int |\nabla u|^2$). Etudier les presque-minimiseurs nous a semblé une bonne idée, à la fois pour unifier les résultats et pour comprendre s'ils reposaient vraiment sur les calculs explicites variés, avec intégrations par parties, ou au contraire sur quelquechose de plus soft ne reposant pas sur un calcul précis. Le papier [7] permet d'obtenir pour les fonctions u presque minimales une bonne partie des résultats de la théorie comme les estimations de nondégenerescence sur la rapidité de décroissance de $u_\pm$ près de la frontière libre, une description des limites par explosion de u en termes de minimisation globale de la fonctionnelle avec q_+ et q_- constantes, et la rectifiabilité uniforme de la frontière libre. C'est bien, mais l'histoire n'est pas finie, pusiqu'on voudrait aussi obtenir des résultats de régularité $C^{1+\varepsilon}$ des frontières libres $\partial_\pm = \partial\{\pm u > 0\}$, au moins dans les boules $B(x,r)$ centrées sur $\partial_\pm$ et telles que $\partial_\pm$ est assez plate dans $B(x, 2r)$.

On espère démontrer ceci pour le problème à une phase (en cours de rédaction), donc il restera le cas des fonctions à deux phases, qui bien sûr semble plus délicat. De plus, on aimerait bien se passer des hypothèses standard de nondégenerescence utilisées par Caffarelli dans le cas du Laplacien, qui demandent que q_+ soit significativement plus grand que q_-, alors qu'il me semble que savoir que les deux sont grands devrait suffire. Il est aussi prévu de généraliser un peu les résultats ci-dessus, pour inclure une certaine invariance par changements de variables bilipschitziens (mais ça, c'est plus facile).

Le papier [10] part d'une étude de la localisation des fonctions propres d'un opérateur de Schrödinger $L = -\Delta + V$ dans un domaine simple Ω, entreprise par M. Filoche et S. Mayboroda. Il semble fort que cette localisation soit largement gouvernée par une certaine fonction, appelée "fonction paysage"), qui est la solution de $Lv = 1$ avec, comme pour le problème initial, la condition de Dirichlet $v = 0$ au bord de Ω. Dans [10] on s'occupe en fait d'un problème différent. Nous avons décidé, avec D. Jerison, M. Filoche et S. Mayboroda, d'essayer de fabriquer un découpage automatique de Ω en régions W_i où l'on pense que les premières fonctions propres vivront, et pour ce faire de minimiser une fonctionnelle qui fait intervenir les volumes des régions W_i en question, la somme des énergies $\int |\nabla u_i|^2$ de fonctions u_i vivant sur les W_i, et d'autres termes moins importants (par exemple, dépendant de V). Curieusement, la fonctionnelle qui nous a semblé la plus pertinente était en fait une variante de la fonctionnelle d'Alt, Caffarelli, et Friedman implicite dans (2), mais avec plusieurs phases, c.-à-d., où la fonction u est maintenant composée de N fonctions u_i qui vivent dans des ensembles $W_i \subset \Omega$ disjoints. On a donc été amenés à démontrer pour nos minimiseurs à N phases le même genre de résultats de régularité que pour les solutions de (2) ci-dessus. En fait, l'un des résultats qu'on obtient est qu'au voisinage de tout point de Ω (y compris la frontière si elle n'est pas trop irrégulière), il n'y a que deux fonctions u_i au plus qui ne sont pas nulles. De sorte qu'on peut continuer comme dans le problème à deux phases. Signalons que, bien que nous ayons été très fiers de découvrir Alt, Caffarelli, et Friedman à N phases, Bucur et Velichkov ont fait la même découverte en même temps, avec des résultats du même type mais de manière différente. En gros, ils vont bien vite à l'essentiel, mais nous pensons avoir des estimations plus détaillées.

Une version beaucoup moins précise, mais portant sur des opérateurs comme Δ^2, sont prévus (avec S. Mayboroda), ce qui je crois serait une première. On continue (surtout Jerison, Filoche, Mayboroda, et Doug Arnold) à essayer de comprendre la localisation des fonctions propres, au moins dans des classes d'exemples.

Le papier [1] est la continuation d'un effort qu'on a fait, avec T. De Pauw et T. Toro, pour comprendre des généralisations du <u>théorème de paramétrage de Reifenberg</u> dans des situations où l'on approxime un ensemble (dans chaque boule et en distance de Hausdorff normalisée) par des objets un peu plus généraux que des plans. Je rappelle que dans sa version initiale, le théorème de Reifenberg dit que si dans chaque boule $B(x, r)$ centrée sur E, l'ensemble fermé non vide E est εr-proche d'un plan affine de dimension d, et si $\varepsilon > 0$ est assez petit (dépendant seulement de la dimension ambiante), alors E a un paramétrage bi-Höldérien par un plan, et qui même s'étend en un homéomorphisme bi-Höldérien de l'espace ambiant. L'exposant de Hölder peut être choisi aussi proche de 1 qu'on veut, en prenant ε assez petit.

La motivation initiale pour ce genre de résultats était, comme d'ailleurs dans le papier initial de Reifenberg, l'étude des ensembles minimaux (comment finir la démonstration de théorèmes comme celui de Jean Taylor ci-dessus, où l'on veut paramétrer l'ensemble minimal par un cône minimal), mais dans [1] on s'intéresse surtout à l'approximation par des sous-ensembles de plans, à condition de supposer que les plans en question ne tournent pas trop vite; autrement dit, on autorise aussi des trous. On en a aussi profité pour écrire des estimations plus précises sur les paramétrages obtenus, à condition d'avoir de meilleures approximations; par exemple, on donne de bonnes conditions pour que ces paramétrages soient Lipschitziens. Ainsi, [1] se rapproche aussi des résulats de C. Bishop, P. Jones, et G. Lerner sur le voyageur de commerce quantitatif multidimensionnel (comment caractériser, par des nombres qui mesurent si E est assez plat dans les boules, le fait que E est contenu dans un ensemble qui a un paramétrage convenable). L'hypothèse supplémentaire d'approximation par des parties de plans aide à garder un contrôle plus facile de la combinatoire, en évitant de tout ré-organiser quand on rencontre des cubes sans bonne approximation. [1] permet également de démontrer la rectifiabilité uniforme de certains ensembles. Le papier [6] est juste un petit complément qui permet de vérifier les hypothèses de [1] un peu plus facilement; il répond aussi à une question de T. Toro sur l'approximation des domaines.

[2] répond à une question de Mario Bonk, qui voulait une démonstration non probabiliste d'un théorème surprenant de Naor et Neiman, sur les plongements d'Assouad des espaces métriques doublant dans des espaces euclidiens.

Dans [8] et [9], on s'est demandé (avec J. Azzam et T. Toro) ce qu'on peut dire d'une mesure μ pour laquelle, dans chaque boule, μ ressemble assez à la mesure de Hausdorff sur un espace affine, puis (dans [9]) à son image par une similitude non triviale (mais qui fixe le centre de la boule, ce qui exclut les mesures fractales usuelles). La ressemblance est mesurée en termes de distance de Wasserstein, ce qui implique qu'on se donne à la fois une information sur la distance de Hausdorff entre le support de μ et celui de son image par la similitude, et la taille de l'erreur est mesurée par des conditions de Carleson sur les distances de Wasserstein en question. On trouve qu'alors, sous des conditions qui sont raisonnable mais pas optimales, μ se décompose en parties de dimensions entières, et ces parties ont des propriétés de rectifiabilité et de continuité absolue par rapport à la mesure de Hausdorff correspondante. La partie amusante est, à mon avis, l'auto-organisation en parties de dimensions différentes.

Encadrement doctoral

Etudiants ayant soutenu dans le passé (et année de soutenance):

Hervé Pajot, 1996

Jean-Christophe Léger, 1997

Séverine Rigot, 1999

Antoine Lemenant, 2008

Vincent Feuvrier, 2008

XiangYu Liang, 2010

Tien-Duc Luu, 2011

Yangqin Fang, 2015

Un peu plus de détails sur les deux derniers

Tien-Duc LUU a soutenu en décembre 2011 une thèse, qui contient des théorèmes de régularité comme celui de J. Taylor, pour les cônes minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$; il a aussi obtenu quelques résultats de régularité pour les ensembles minimaux de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ (régularité de type Hölder au voisinage des points où E a une limite par explosion de type $Y \times \mathbb{R}$ ou, sous conditions topologiques de type Mumford-Shah, de type $T \times \mathbb{R}$. Il a eu un contat postdoctoral à Rome, puis a été ATER à Paris Sud, et est actuellement au Vietnam.

Yangqin FANG a d'abord démontré l'existence d'ensembles minimaux sous la contrainte topologique de Reifenberg: on se donne un ensemble frontière $L \subset \mathbb{R}^n$ (disons, compact et tel que $\mathcal{H}^d(L) = 0$ pour simplifier l'énoncé), un groupe commutatif G surlequel on va calculer l'homologie (disons, $\mathbb{Z}$), et un sous groupe H du groupe d'homologie de Cech de dimension $d-1$ sur L et calculée avec G. On dit que l'ensemble $E \supset L$ borde L si tous les éléments de H deviennent nuls dans l'homologie de Cech de dimension $d-1$ sur H (ou autrement dit, si l'image de H par l'application naturelle associée à l'inclusion de L dans E est le groupe trivial). Fang montre l'existence d'ensembles E qui bordent L et tels que $\mathcal{H}^d(E)$ soit minimal sous cette contrainte. Il y avait des résultats préalables de Reifenberg (quand G est compact et L est régulier), puis d'Almgren (qui annonce le même résultat, en autorisant des intégrands, avec une démonstration à base de varifolds qui me semble malheureusement au moins un peu lacunaire), puis de De Pauw (qui autorise $G = \mathbb{Z}$, mais seulement pour $d = 2$, $n = 3$, et L régulière).

La démonstration utilise la méthode de Feuvrier (construction d'une suite minimisante $\{E_k\}$ composée d'ensembles uniformément quasiminimaux, ce que l'on utilise pour faire passer $\mathcal{H}^d(E_k)$ à la limite. A cette occasion, Fang a généralisé le lemme de Dal Maso, Morel, et Solimini sur la concentration uniforme, pour obtenir la semicontinuité inférieure pour une classe d'intégrands naturelle (et un peu plus grande que celle définie par Almgren). Autrement dit, on peut remplacer la quantité $\mathcal{H}^d(E)$ par

$$\int_E F(x, T_x E)\, d\mathcal{H}^d(x),$$

où F est une fonction définie sur le produit de $\mathbb{R}^n$ par la Grassmannienne $G(n,d)$ (et a des propriétés de convexité que je n'écris pas), et T_xE est le d-plan tangent approché à E en

x. Ceci suppose que E soit rectifiable; autrement on peut se débrouiller, mais a posteriori on sait que seuls les ensembles rectifiables sont vraiment intéressants.

Fang s'intéresse maintenant à la régularité au bord des ensembles presque minimaux glissants E (comme ci-dessus), dans le cas particulier où E est de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, il y a un seul bord L, qui est une surface lisse de dimension 2 (par exemple, un plan), et E vit d'un seul coté de L (par exemple, dans un demi-espace). Il minimise (ou presque minimise) $\mathcal{H}^2(E)$ localement, sous la contrainte supplémentaire que E contienne L. C'est une contrainte raisonnable pour les fims de savon, et qui permet de diminuer suffisament la liste des limites par explosions. Autrement, on s'attend à de vraies complications, quand E touche L de manière tangentielle sur un ensemble qui peut être très compliqué. Pour l'instant, il sait montrer que E est Hölder-équivalent à un cône minimal. La régularité C^1 (comme dans le théorème de J. Taylor) est en cours d'écriture, et une fois ceci fait il pourra normalement en déduire un théorème d'existence, à la fois d'ensembles minimaux glissants et de courants minimiseurs de taille, sous contrainte homologique. Le problème est intéressant, à la fois parce que ce serait le premier résultat d'existence un peu général en dimension 2 dans chacun de ces deux contextes, et parce que le cas du problème de Plateau avec des fils de diamètre non nul a un sens physique indéniable.

Edoardo CAVALLOTTO a commencé une thèse en 2014. Pour l'instant, on essaie de montrer par des méthodes de calibration que certains ensembles sont minimaux (au sens d'Almgren, ou en tant que support de courant minimiseur de taille). L'idée initiale d'Edoardo était de se placer dans des classes de chaînes bémol à coefficients dans des groupes bien choisis pour profiter de relations algébriques. Mais c'est plus compliqué que prévu. Il étudie aussi certains cônes minimaux avec condition de bord.

Rayonnement et vulgarisation

Je participe depuis 2013 à l'ANR "Geometrya" (théorie géométrique de la mesure et ses applications) dirigée par H. Pajot.

Ci-dessous, une liste de conférences où j'ai fait des exposés ou minicours, et de séminaires (hors Orsay):

- Février 2007, Modena, Geometric Measure Theory and least-area problems;
- Février 2007, Indiana University (Bloomington);
- Mai 2007, Ecole Polytechnique, Journées J.M. Bony;
- Juillet 2007, ENS Paris, 3ème conférence franco-chinoise;
- Aout 2007, Helsinki, Lars Ahlfors Centennial Celebration;
- Septembre 2007, Monastir, Fractals and Related Fields;
- Janvier 2008, IHP, Ecole d'hiver, Regularity of the minimal segmentations;
- Avril 2008, BIRS workshop, Recent Developments in Elliptic and Degenerate Elliptic Partial Differential Equations, Systems and Geometric Measure Theory;
- Mai 2008, Lyon, Glimpses of geometry;
- Juin 2008, cours des journées EDP à Evian;
- Janvier 2009, IPAM, Quantitative and Computational Aspects of Metric Geometry;
- Juin 2009, Barcelone, Harmonic Analysis, Geometric Measure Theory and Quasiconformal Mappings;
- Juin 2009, Madrid, "The Poetry of Analysis";

- Aout 2009, Bologne, conference on Subriemannian Geometrical Analysis and Vision;
- Mai 2010, Seillac, Conformal Methods in Analysis and Dynamics;
- Juillet 2010, Banff, workshop on Analysis and Boundary Value Problems on Real and Complex Domains;
- Novembre 2010, Cachan, Fête en l'honneur du prix Gauss.

Séminaire tournant d'analyse (cours de 4h30), Grenoble, 6 janvier 2011
Séminaire de Philosophie et Maths, École Normale Supérieure, 17 Janvier 2011
Fractals and Related Fields II, Porquerolles, 13-17 juin 2011
Conférence en l'honneur de E. Stein, Princeton, 16-22 juin 2011
Martin's Days (Conférence en l'honneur du 70ème anniversaire de Hans Martin Reimann), Berne, 11-13 Octobre 2011
Séminaire de Mathématique Supérieure (minicours de 4h), Montréal, 26 juin-8 juillet 2011
Workshop on Mapping theory in metric spaces, AIM, Palo Alto, 9-13 Janvier 2012
Printemps des sciences à Mons le 23 mars 2012 (le seul exposé de vulgarisation de la liste, sur les films de savon)
Conference Geometric Measure Theory, Max Planck Institute Potsdam, 2-4Juillet 2012,
Première journée de l'ANR Geometrya à Lyon, 11-12 Octobre 2012
Séminaire à Zürich, le 24 Octobre 2012
Journes Annuelles du GDR "Analyse Fonctionnelle, Harmonique et Probabilits", Paris-Est Marne-la-Valle, 29–31 octobre 2012
Harmonic Analysis, PDEs and Geometry: Joint Workshop of the ANR "Harmonic Analysis at its boundaries" and the ICMAT, Madrid, 27-31 mai 2013
ERC workshop on Geometric Measure Theory, Analysis in Metric Spaces, 7-11 Octobre 2013
16 décembre 2013, GT calcul des variations, Paris
Séminaire d'analyse fonctionnelle à Jussieu, 2 Octobre 2013
Exposés de séminaire à Berkeley, Février 2014, et à Stanford le 12 mai 2014
Seminaire à Potsdam le 3 juillet 2014
Workshop on Real Analysis, Hausdorff Institute for Mathematics, Bonn, le 14 juillet 2014
Oberwolfach, Real Analysis, Harmonic Analysis and Applications, 20-26 Juillet 2014

Pour info, situations particulières

J'ai bénéficié d'une délégation du CNRS (6 mois) en 2008-2009 et d'un semestre de CRCT en 2009-2010. J'ai été membre de l'IUF deux fois.