Feuille d'exercices n° 1 : Variables aléatoires réelles et fonctions de répartition

Éléments de cours.

Déf : *Fonction indicatrice* de $A \subset \mathbb{R}$: $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A, 0$ sinon.

Soit maintenant X une variable aléatoire réelle (v.a.r).

Fonction de répartition.

Déf : *Fonction de répartition* de X : $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Prop : F_X est croissante, continue à droite, $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$, et F_X caractérise la loi de X.

Prop : Limite à gauche en x : $F_X(x-) = \mathbb{P}(X < x)$.

Déf : x est un *atome* de la loi de X ssi $\mathbb{P}(X = x) > 0$ ssi x est un point de discontinuité de F_X.

Variables aléatoires discrètes.

Déf : X est *discrète* s'il existe un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$ *au plus dénombrable* tel que $\mathbb{P}(X \in S) = 1$.

Prop : X est discrète ssi l'ensemble S_X des atomes de X vérifie $\mathbb{P}(X \in S_X) = 1$.

Prop : X est discrète ssi F_X est constante par morceaux.

Déf : *Fonction de masse* de X : $p_X : S_X \to \mathbb{R}$, $p_X(s) = \mathbb{P}(X = s)$.

Prop : p_X caractérise la loi de X, et $\sum_{s \in S_X} p_X(s) = 1$.

Prop : Pour $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{s \in S_X} p_X(s) \mathbb{1}_A(s)$.

Variables aléatoires à densité.

Déf : X est *à densité* s'il existe $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy$.

Déf : f_X est appelée *densité* de X.

Prop : f_X caractérise la loi de X, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$.

Prop : Si X est à densité, alors F_X est continue, i.e. la loi de X est sans atome.

Prop : Si F_X est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors X est à densité.

Prop : Pour $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \mathbb{1}_A(x)\, dx$.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F_X est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -2, \\ \frac{1}{30} & \text{si} \quad -2 \leqslant t < 0, \\ \frac{1}{12} & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1, \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad 1 \leqslant t < 3, \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad 3 \leqslant t < 5, \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 5. \end{cases}$$

1. Montrer que X est une v.a. discrète et déterminer sa fonction de masse.
2. Calculer $\mathbb{P}(-3 \leqslant X < \frac{1}{2})$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F_X est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0, \\ \frac{t}{2} & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de F_X, montrer que X est une v.a. à densité et déterminer cette densité.
2. Calculer $\mathbb{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{si} \quad x > a, \\ 0 & \text{si} \quad x \leq a, \end{cases}$$

pour un certain $a > 0$.

1. Calculer a.
2. Calculer $\mathbb{P}(X > 20)$.
3. Quelle est la fonction de répartition de X ?

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{4}\,\mathbb{1}_{\{0<x<1\}} + \frac{3}{8}\,\mathbb{1}_{\{3<x<5\}}.$$

1. Donner la fonction de répartition de X.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \in [\frac{1}{2}, 2] \cup]3, 4])$.