

DM.

Exercice 1. Soit G_1, G_2, G_3 trois variables aléatoires indépendantes de loi $\text{Geom}_{\mathbb{N}^*}(p)$ avec $p \in]0, 1]$.

1. Calculer la loi de $G_1 + G_2$. Quelle loi reconnaît-on ?
2. Calculer la loi de $G_1 + G_2 + G_3$. Quelle loi reconnaît-on ?

Soit E_1, E_2, \dots des variables aléatoires indépendantes de loi $\text{Exp}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

3. Calculer la loi de $E_1 + E_2$. Quelle loi reconnaît-on ?
4. Déterminer par récurrence la loi de $E_1 + E_2 + \dots + E_n$. Quelle loi reconnaît-on ?

Exercice 2. Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f et g .

1. Montrer qu'une densité de $Z = \frac{X}{Y}$ est donnée par

$$h(z) = \int_0^{+\infty} y (f(zy)g(y) + f(-zy)g(-y)) dy.$$

2. Application : déterminer la loi de Z dans le cas où X et Y sont indépendantes, de même loi la loi :
 - (a) normale centrée réduite $\mathcal{N}_1(0, 1)$.
 - (b) exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, $\text{Exp}(\lambda)$.