Feuille d'exercices n^o 0 : Préliminaires

Exercice 1. On rappelle l'expression de la fonction gamma d'Euler :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif,
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
2. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour n entier naturel non nul.
3. Montrer que
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
On pourra se ramener à l'intégrale de Gauss : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n,
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$$

On pose pour tout entier naturel n :

$$\beta(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

5. Calculer $\beta(0)$ et $\beta(1)$.
6. Exprimer $\beta(n+2)$ en fonction de $\beta(n)$.
7. En déduire la valeur de $\beta(n)$ pour tout entier naturel n.
8. Faire un lien entre les résultats des questions 4 et 7, et retrouver ce résultat par un changement de variable.

Correction. *1. Par intégration par parties :*

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} \mathrm{d}t = \Big[- t^x e^{-t} \Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

2. On calcule directement $\Gamma(1) = 1$. Grâce à la formule de la question précédente, on en déduit par récurrence que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3. (a) En posant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$ donc $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

(b) En utilisant la question 1, on en déduit par récurrence :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$$

(c) Par croissance de la fonction Γ :

$$\Gamma(n) \leqslant \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \leqslant \Gamma(n+1).$$

En utilisant les questions précédentes :

$$(n-1)! \leqslant \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \leqslant n!,$$

d'où l'encadrement demandé.

4. En posant le changement de variable $y = \beta x$, $x = \frac{y}{\beta}$ donc $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\beta}$,

$$\int_0^\infty x^k f(x)\mathrm{d}x = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha+k-1}e^{-\beta x}\mathrm{d}x = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha+k-1}\frac{e^{-y}}{\beta}\mathrm{d}y$$
$$= \beta^{-k}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{\beta^k}.$$

Exercice 2.

1. Déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^n k$ en calculant la somme $A = \sum_{k=1}^n (k+1)^2 - \sum_{k=1}^n k^2$ de deux façons différentes.
2. Par un raisonnement similaire, calculer $\sum_{k=1}^n k^2$.
3. Donner des équivalents de ces deux sommes pour $n \to \infty$.
4. Soit $\alpha > 0$ un réel. À l'aide de la comparaison série-intégrale :
$$\int_{k-1}^k t^\alpha \,\mathrm{d}t \leq k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t,$$
proposer un encadrement puis donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$.
5. On rappelle le résultat suivant au sujet de l'intégrale de Riemann : pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue bornée,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Retrouver à l'aide de ce résultat un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ (sans encadrement toutefois).

Correction.

1. En faisant apparaitre une somme télescopique :

$$A = \sum_{k=1}^n (k+1)^2 - \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=2}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)^2 - 1$$

puis

$$A = \sum_{k=1}^n (k^2+2k+1) - \sum_{k=1}^n k^2 = 2\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 2\sum_{k=1}^n k + n$$

D'où

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

On rappellera aussi aux étudiants le raisonnement géométrique du jeune Gauss qui constate que l'aire d'un rectangle de côtés n et $n+1$ comprend deux fois la somme $\sum_{k=1}^n k$.

2. Ensuite, on pose pour le calcul de la somme des carrés

$$B = \sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n (k^3+3k^2+3k+1) - \sum_{k=1}^n k^3 = 3\sum_{k=1}^n k^2 + 3\sum_{k=1}^n k + n$$

et

$$B = \sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3 = (n+1)^3 - 1$$

d'où :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}((n+1)^3 - 3\sum_{k=1}^n k - n - 1)$$
$$= \frac{1}{6}(2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1))$$
$$= \frac{1}{6}((n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2))$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

3. Ainsi, $\sum_{k=1}^n k \sim n^2/2$ et $\sum_{k=1}^n k^2 \sim n^3/3$.

4. Maintenant, puisque les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$ sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{[k-1,k[} t\mathrm{d}t \leq k \leq \int_{[k,k+1[} t\mathrm{d}t \text{ et } \int_{[k-1,k[} t^2\mathrm{d}t \leq k^2 \leq \int_{[k,k+1[} t^2\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \int_{[k-1,k[} t\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^n k \leq \sum_{k=1}^n \int_{[k,k+1[} t\mathrm{d}t \text{ et } \sum_{k=1}^n \int_{[k-1,k[} t^2\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq \sum_{k=1}^n \int_{[k,k+1[} t^2\mathrm{d}t$$

puis, en appliquant la relation de Chasles aux intégrales, on obtient : Au final,

$$\frac{n^2}{2} = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^n \leq \sum_{k=1}^n k \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{2} \text{ et } \frac{n^3}{3} = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^n \leq \sum_{k=1}^n k^2 \leq \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^3-1}{3},$$

et les minorants et majorants sont équivalents à $n^2/2$ dans le premier cas et $n^3/3$ dans le second cas.

Exercice 3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; calculer les sommes des séries suivantes :

1. $A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$. *On peut au choix dire que c'est un DSE connu, ou se ramener à la définition de l'exponentielle comme unique solution de l'équation différentielle ordinaire $f' = f, f(0) = 1$.*
2. $B = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}$.
3. $C = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}$.
4. $D = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}$.

Correction. *1. $A = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^\lambda$.*

2. De même, on obtient $B = \lambda^2 e^\lambda$.

3. On écrit enfin $k^2 = k(k-1) + k$ pour obtenir $C = B + A = (\lambda^2 + \lambda)e^\lambda$.

Exercice 4. 1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $(1-\lambda)\sum_{k=0}^{n} \lambda^k$.

2. En déduire, pour $|\lambda| < 1$, la valeur de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k$.
3. À l'aide d'un produit de Cauchy, développer en série entière $(1-\lambda)^{-2}$ pour $|\lambda| < 1$.
4. Retrouver cette identité au moyen du théorème de dérivation sous le signe somme des séries entières.

Les questions qui suivent sont plus difficiles.

5. Montrer que

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 0} \mathbb{1}_{k_1+k_2+\ldots+k_n=j} = \binom{j+n-1}{j}.$$

On pourra remarquer que le membre de gauche compte aussi les chemins du plan $\mathbb{Z}^2$ avec des pas vers le haut et vers la droite reliant $(0,0)$ à $(n-1,j)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Plus généralement, pour $|\lambda| < 1$, développer en série entière $(1-\lambda)^{-n}$.