Feuille d'exercices n° 0 : Préliminaires

Exercice 1. On rappelle l'expression de la fonction gamma d'Euler :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif,
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
2. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour n entier naturel non nul.
3. Montrer que
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
On pourra se ramener à l'intégrale de Gauss : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n,
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$$

On pose pour tout entier naturel n :

$$\beta(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

5. Calculer $\beta(0)$ et $\beta(1)$.
6. Exprimer $\beta(n+2)$ en fonction de $\beta(n)$.
7. En déduire la valeur de $\beta(n)$ pour tout entier naturel n.
8. Faire un lien entre les résultats des questions 4 et 7, et retrouver ce résultat par un changement de variable.

Exercice 2.

1. Déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$ en calculant la somme $A = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2$ de deux façons différentes.
2. Par un raisonnement similaire, calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
3. Donner des équivalents de ces deux sommes pour $n \to \infty$.
4. Soit $\alpha > 0$ un réel. À l'aide de la comparaison série-intégrale :
$$\int_{k-1}^{k} t^\alpha \, \mathrm{d}t \leq k^\alpha \leq \int_{k}^{k+1} t^\alpha \, \mathrm{d}t,$$
proposer un encadrement puis donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.
5. On rappelle le résultat suivant au sujet de l'intégrale de Riemann : pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue bornée,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t.$$
Retrouver à l'aide de ce résultat un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ (sans encadrement toutefois).

Exercice 3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; calculer les sommes des séries suivantes :

1. $A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$. *On peut au choix dire que c'est un DSE connu, ou se ramener à la définition de l'exponentielle comme unique solution de l'équation différentielle ordinaire $f' = f, f(0) = 1$.*
2. $B = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}$.
3. $C = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!}$.
4. $D = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!}$.

Exercice 4.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $(1-\lambda) \sum_{k=0}^{n} \lambda^k$.
2. En déduire, pour $|\lambda| < 1$, la valeur de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k$.
3. À l'aide d'un produit de Cauchy, développer en série entière $(1-\lambda)^{-2}$ pour $|\lambda| < 1$.
4. Retrouver cette identité au moyen du théorème de dérivation sous le signe somme des séries entières.

Les questions qui suivent sont plus difficiles.

5. Montrer que
$$\sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 0} \mathbb{1}_{k_1+k_2+\ldots+k_n=j} = \binom{j+n-1}{j}.$$
On pourra remarquer que le membre de gauche compte aussi les chemins du plan $\mathbb{Z}^2$ avec des pas vers le haut et vers la droite reliant $(0,0)$ à $(n-1, j)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Plus généralement, pour $|\lambda| < 1$, développer en série entière $(1-\lambda)^{-n}$.