Feuille d'exercices n° 9 : Estimateurs et intervalles de confiance

Exercice 1. [Poisson] On considère le modèle statistique associé à la famille de lois $(\mathrm{Poi}(\theta), \theta > 0)$, avec $\mathrm{Poi}(\theta)$ la loi de Poisson de paramètre θ.

1. Calculer l'estimateur des moments de θ associé au premier moment.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

Exercice 2. [Bernoulli et entropie] On considère le modèle statistique associé à la famille de lois $(\mathrm{Ber}(\theta), 0 < \theta < 1)$, avec $\mathrm{Ber}(\theta)$ la loi de Bernoulli paramètre θ.

1. Étudier la fonction $]0,1[\to \mathbb{R}, \theta \mapsto x\ln(\theta) + (1-x)\ln(1-\theta)$, où $x \in [0,1]$ est fixé.
2. En déduire l'estimateur $\hat{\theta}_n^1$ du maximum de vraisemblance de θ.
3. Calculer biais $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n^1] - \theta$ et erreur quadratique $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n^1 - \theta)^2]$.

Exercice 3. [Gibbs et entropie] Si $(p_i)_{i\geqslant 0}$ est une famille de nombres réels positifs de somme 1, on pose $H(p) = \sum -p_i \ln(p_i)$ avec la convention usuelle $0.\ln(0) = 0$

1. Montrer l'inégalité de Gibbs au sujet de l'entropie de lois discrètes : si $(q_i)_{i\geqslant 0}$ est une autre famille de nombres réels positifs de somme 1 :
$$-\sum_i p_i \ln(p_i) \leqslant -\sum_i p_i \ln(q_i)$$
2. Calculer $H(p^0)$ si p^0 est associée à la loi uniforme sur n éléments : $p_i^0 = 1/n$, $0 \leqslant i < n$
3. Montrer : $H(p) \leqslant H(p^0)$ pour tout p tel que $j > n \Rightarrow p_j = 0$.
4. Calculer $H(p^1)$ si p^1 est est associée à la loi $\mathrm{Geom}_{\mathbb{N}}(q)$, $q > 0$.
5. Montrer : $H(p) \leqslant H(p^1)$ si $\sum jp_j \leqslant \sum jp_j^1 = \frac{1-q}{q}$.

Exercice 4. [Uniforme, deux estimateurs bien différents] On considère le modèle statistique associé à la famille de lois $(\mathrm{Unif}([0,\theta]), \theta > 0)$, avec $\mathrm{Unif}([0,\theta])$ la loi uniforme sur $[0,\theta]$.

1. Calculer l'estimateur des moments de θ associé au premier moment.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.
3. Comparer les vitesses de convergence de ces deux estimateurs.

Exercice 5. [Exponentielle, calculs explicites] On considère le modèle statistique associé à la famille de lois $(\mathrm{Exp}(\theta), \theta > 0)$, avec $\mathrm{Exp}(\theta)$ la loi exponentielle de paramètre θ.

1. Donner les deux premiers moments de $\mathrm{Exp}(\theta)$.
2. En déduire deux estimateurs des moments pour θ, respectivement notés $\hat{\theta}_n^1$ et $\hat{\theta}_n^2$.
3. Montrer que $\hat{\theta}_n^1$ est aussi l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.
4. Quelle loi suit $X_1 + \ldots + X_n =: n\bar{X}_n$? Préciser sa densité.
5. En déduire le biais $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n^1] - \theta$ de l'estimateur $\hat{\theta}_n^1$, ainsi que son erreur quadratique $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n^1 - \theta)^2]$.
6. Vérifier que $\left(\frac{\theta}{\bar{X}_n}, \sqrt{n}\left(\frac{1}{\theta} - \bar{X}_n\right)\right)$ converge en loi vers une limite à préciser

7. Montrer [1] que $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^1-\theta\right)$ converge en loi (on dit que l'estimateur est asymptotiquement normal).

Exercice 6. [Non définition ou non-unicité du max de vraisemblance] On considère le modèle statistique associé à la famille de lois de densités $(f(x-\theta), \theta \in \mathbb{R})$, où $\theta \in \mathbb{R}$ le paramètre de translation est à estimer. Étudier l'estimateur du maximum de vraisemblance dans chacun des deux cas suivants

1. $f(x) = \frac{e^{-\frac{|x|}{2}}}{2\sqrt{2\pi|x|}}$ (existence de l'argmax)
2. $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ est la loi de Laplace (précisément, on regardera l'unicité dans le cas d'un n-échantillon de taille n paire).

Exercice 7. [Intervalle de confiance] Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon selon une loi sur $\mathbb{R}$ de carré intégrable. On pose

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \text{ et } V_n = \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} - (\bar{X}_n)^2.$$

1. Quelle est la limite p.s. de la suite V_n ?
2. Montrer à l'aide de Slutsky qu'on a la convergence en loi : $\sqrt{\frac{n}{V_n}}(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
3. En déduire un intervalle de confiance de niveau $\alpha \in (0,1)$ pour $\mathbb{E}[X_1]$ (symétrique autour de $\mathbb{E}[X_1]$ disons).

Exercice 8. [Delta méthode] Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables alatoires réelles. Supposons qu'il existe $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim a_n = \infty$, x un réel et μ une mesure de probabilité telle que $a_n(X_n - x) \to \mu$ en loi.

1. Calculer la limite en loi de $a_n(f(X_n) - f(x))$.

1. on pourra noter que $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^1-\theta\right) = \frac{\theta}{\bar{X}_n}\sqrt{n}\left(\frac{1}{\theta} - \bar{X}_n\right)$.