POSITIVITY OF BOUNDARY INTERSECTIONS OF J-COMPLEX CURVES

IVASHKOVICH S.

Let an almost complex structure J in a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^{2n}$ be given, $n \geq 2$. Let furthermore $0 \in W$ be a germ of a J-totally real submanifold of real dimension n. After an appropriate coordinate change we can assume wlg that for an appropriate neighborhood B of zero we have that $(B, W) = (\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n)$ and $J|_{\mathbb{R}^n} = J_{st}$. Here J_{st} stands for the standard complex structure of $\mathbb{C}^n$. Such coordinate change Ψ we shall call a redressing map. Denote by $\Delta^+ := \{\zeta \in \Delta : \Im\zeta \geq 0\}$ the upper half-disk and by $\beta_0 := (-1, 1)$ its edge. Let a J-holomorphic map $u : (\Delta^+, \beta_0, O) \to (\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n, 0)$ be given, assume it is continuous up to β_0. We shall call such u a J-complex half-disk attached to W. It is not difficult to prove that there exist a $\mu \in \mathbb{N}$ such that

$$u(\zeta) = \mathrm{v}_0\zeta^\mu + O(|\zeta|^{\mu+\alpha}) \quad \text{with} \quad \mathrm{v}_0 \neq 0. \tag{1}$$

We shall call v_0 the tangent vector to u at zero and (1) the normal form of a J-complex half-disk attached to a totally real submanifold. Number μ we shall call the order of vanishing of u at zero. This μ doesn't depend on the redressing map Ψ. Making a reflection with respect to $W = \mathbb{R}^n$, i.e., setting

$$\tilde{u}(\zeta) = \begin{cases} u(\zeta) \text{ if } \Im\zeta \geq 0 \\ \overline{u(\bar{\zeta})} \text{ if } \Im\zeta < 0, \end{cases} \tag{2}$$

we can extend u to Δ as a $\mathcal{C}^\alpha$-regular map. Now let $u_1, u_2 : (\Delta^+, \beta_0, 0) \to (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2, 0)$ be two J-complex disks attached to W which intersect at zero. We define the boundary intersection index of u_1 and u_2 at zero as the intesection number at zero of their extensions by reflection, and denote this index as $\mathrm{ind}_0^{\mathrm{b}}(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$. Our goal is present the following

Theorem 1. *Let $u_i : (\Delta^+, \beta_0, 0) \to (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2, 0)$ be two J-complex half-disks such that one is not a reparameterization of another. Then their boundary intersection index is correctly defined and satisfies*

$$\mathrm{ind}_0^{\mathrm{b}}(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2) \geq \mu_1 \cdot \mu_2, \tag{3}$$

where μ_i is the order of vanishing of u_i at zero, $i = 1, 2$.

To my best knowledge this result is new even for integrable J-s unless W is supposed to be real-aalytic.

*Université de Lille-1, UFR de Mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq, France. serge.ivashkovych@univ-lille.fr

POSITIVITÉ D'INTERSECTIONS AU BORD DES COURBES J-COMPLEXES

IVASHKOVYCH S.

Soit J une structure presque complexe dans un voisinage d'origine de $\mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 2$ et soit $0 \in W$ un germe de variété J-totalement réelle de dimension réelle n. Par une changement de variables nous pouvons supposer que pour un voisinage B de zéro $(B, W) = (\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n)$ et $J|_{\mathbb{R}^n} = J_{st}$. Ici J_{st} désigne la structure standard de $\mathbb{C}^n$. Une telle changement de coordonnées Ψ on va appeler un redressement. Posons $\Delta^+ := \{\zeta \in \Delta : \Im\zeta \geq 0\}$ et $\beta_0 := (-1, 1)$. Soit $u : (\Delta^+, \beta_0, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n, 0)$ une application J-holomorphe continue jusqu'à β_0. On va appeler une telle u un demi-disque J-complexe attaché a W. On peut prouver qu'il existe $\mu \in \mathbb{N}$ tel que

$$u(\zeta) = \mathrm{v}_0\zeta^\mu + O(|\zeta|^{\mu+\alpha}) \quad \text{avec un} \quad \mathrm{v}_0 \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n, \mathrm{v}_0 \neq 0. \tag{1}$$

Nous appelons v_0 le vector tangent à u en zéro et (1) la forme normale de demi-disque J-complexe attaché à une sous-variété totalement réelle. On appelle le nombre μ l'ordre d'annulation de u en zéro. Ce μ ne dépende pas d'application de redressement Ψ. On va prolonger u "par reflection" de Δ^+ a Δ

$$\tilde{u}(\zeta) = \begin{cases} u(\zeta) \text{ si } \Im\zeta \geq 0 \\ \overline{u(\bar{\zeta})} \text{ si } \Im\zeta < 0. \end{cases} \tag{2}$$

$\tilde{u}$ est de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ $\forall\alpha, 0 < \alpha < 1$. Soient $u_1, u_2 : (\Delta^+, \beta_0, 0) \to (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2, 0)$ deux demi-disques J-complexes attachés au W qui s'intersectent en zéro. Nous définissons l'indice d'intersection de u_1 et u_2 comme l'indice d'intersection en zéro de $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2$ et notons ce indice comme $\mathsf{ind}_0^{\mathsf{b}}(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)$. Le but de notre exposé est d'expliquer le résultat suivant

Théorème. *Avec les conditions ci-dessus, si u_1 n'est par une reparamétrisation de u_2, alors l'indice $\mathsf{ind}_0^{\mathsf{b}}(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)$ est définie correctement et*

$$\mathsf{ind}_0^{\mathsf{b}}(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2) \geq \mu_1 \cdot \mu_2, \tag{3}$$

où μ_i est l'ordre d'annulation de u_i en zéro, $i = 1, 2$. En particulier $\mathsf{ind}_0^{\mathsf{b}}(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)$ est positif.

À ma connaissance ce résultat est nouveau même dans le cas quand $J = J_{st}$ mais W n'est pas analytique réelle.

*Université de Lille, UFR de Mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq, France. serge.ivashkovych@univ-lille.fr