Marathon d'Orsay de Mathématiques

Octobre 2024

Le Marathon d'Orsay de Mathématiques est une activité mathématique et ludique qui vous est proposée en dehors de tout cadre d'études. Vous trouverez quelques problèmes de mathématiques ci-dessous. Leur résolution ne relève pas de l'application de recettes enseignées dans des cours avancés, mais nécessite plutôt une réflexion approfondie et une adaptation aux situations nouvelles.

Pour résoudre ces problèmes correctement, il vous est demandé de justifier très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Vos solutions peuvent être envoyées par email à `marathon.orsay.math@gmail.com`.

Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire dans des fichiers séparés. Toutes les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **mardi 19 novembre 2024 à 23h59**. Les solutions reçues tardivement ne seront plus prises en considération. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email (pour recevoir les problèmes suivants). Ceux qui souhaitent recevoir les énoncés des problèmes suivants sans fournir de solutions pour les problèmes ci-dessous, peuvent le demander à l'adresse email ci-dessus.

Les noms de ceux ayant fourni une solution correcte seront listés avec la solution officielle. Tous les participants ayant résolu au moins un problème durant l'année 2024–2025 seront invités à la grande remise des prix à Orsay en fin d'année.

Problème 1 (semi et complet)

Pour s'entraîner en attendant le début du Marathon d'Orsay de Mathématiques qui commence plus tard cette année, Marina et Bernadette jouent à un jeu. Au début de celui-ci, le nombre 10^{2024} est écrit au tableau. Chacune à son tour, l'une des deux amies peut effectuer l'une des deux opérations suivantes : soit remplacer un nombre A au tableau par deux entiers B et C strictement supérieurs à 1 et tels que $B \times C = A$, soit choisir deux nombres égaux entre eux parmi ceux écrits sur le tableau et effacer un ou deux de ces nombres. La première joueuse qui n'est plus en mesure d'effectuer aucune de ces opérations quand vient son tour de jouer a perdu. Marina commence à jouer en premier. Peut-elle utiliser une stratégie qui lui permette de gagner à coup sûr, quelles que soient les opérations choisies par Bernadette ?

Problème 2 (semi et complet)

Ada a écrit un programme informatique qui calcule puis affiche les termes d'une suite (x_n) d'entiers strictement positifs obtenus de la manière suivante. L'ordinateur demande à l'utilisateur de choisir un entier $x_1 > 0$, puis pour tout naturel $n \geq 1$, l'ordinateur affiche l'entier x_{n+1}, qui est obtenu en ajoutant à x_n l'entier entre 1 et 9 correspondant à l'un des chiffres non nuls de x_n (en représentation décimale) choisi au hasard parmi ceux-ci. Par exemple à partir de l'entier 2073, si on choisit au hasard d'utiliser le chiffre 7 parmi les trois chiffres 2, 7 et 3 non nuls de 2073, on obtient l'entier $2073 + 7 = 2080$. Ada teste son programme à plusieurs reprises, et constate qu'à chaque fois la suite d'entiers affichée par l'ordinateur contient des entiers pairs. Après un moment de réflexion, elle conclut que quel que soit le choix de x_1 par l'utilisateur, et quels que soient les choix effectués au hasard par l'ordinateur, la suite (x_n) contiendra toujours une infinité de nombres pairs. Quel est son raisonnement ?

Problème 3 (complet)

Jules considère l'ensemble $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ consistant en tous les nombres de la forme $\frac{1}{k}$ avec k entier strictement positif. Jules souhaite recouvrir cet ensemble E au moyen de 7 intervalles fermés de longueur $\ell > 0$, c'est-à-dire choisir 7 tels intervalles pour que chaque élément de E appartienne à au moins l'un de ces intervalles. On rappelle qu'un intervalle fermé de longueur ℓ est un ensemble comprenant tous les nombres réels entre un réel a et le réel $a + \ell$ inclus. Quelle est la valeur minimale de ℓ pour laquelle Jules peut effectuer ce recouvrement ?

Problème 4 (complet)

Sofia et Marc jouent à se lancer des défis mathématiques. Etant donné un entier $N > 1$, Marc choisit N entiers pas forcément distincts entre 1 et N, tels que leur somme est égale à $2N$. Sofia doit alors choisir certains des entiers fournis par Marc de sorte que leur somme soit égale à N. Pour quelles valeurs de N Sofia est-elle certaine de parvenir à faire un tel choix, quels que soient les entiers fournis par Marc ?