Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la deuxième vague de janvier 2025

Voici les solutions de la deuxième vague de problèmes avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 5 : Commençons par remarquer que Sophie va écrire une liste de $\binom{\ell}{d}$ mots, puisque chaque mot à écrire correspond au choix de d lettres parmi ℓ à changer de A en B ou de B en A. Pour chaque i entre 1 et ℓ, concentrons-nous sur la $i$ème lettre de chaque mot écrit. Il y en a $\binom{\ell-1}{d}$ pour lesquels la $i$ème lettre est inchangée par rapport au mot choisi, puisque les d lettres changées sont choisies parmi les $\ell - 1$ autres lettres. D'autre part, il y a $\binom{\ell-1}{d-1}$ mots pour lesquels la $i$ème lettre est changée par rapport au mot choisi, puisque cette lettre est choisie pour être changée, et il reste $d - 1$ lettres à changer qui sont choisies parmi les $\ell - 1$ autres lettres. Lorsque $\binom{\ell-1}{d} \neq \binom{\ell-1}{d-1}$, c'est-à-dire lorsque $d \neq \ell - d$ ou encore $\ell \neq 2d$, Gloria pourra déterminer la $i$ème lettre du mot choisi : c'est celle qui apparaît $\binom{\ell-1}{d}$ fois en $i$ème position dans les mots écrits. Ainsi, Gloria trouvera à coup sûr, donc avec probabilité 1, le mot choisi par Sophie lorsque $\ell \neq 2d$.
Lorsque $\ell = 2d$, il y a au moins deux mots qui peuvent donner lieu à la liste de mots écrits : celui M choisi par Sophie et le mot $\overline{M}$ obtenu en changeant toutes les lettres du mot choisi par Sophie. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre, de sorte que si $\ell = 2d$ Gloria a une probabilité $\frac{1}{2}$ de deviner correctement du premier coup. Si on suppose par l'absurde que c'était le cas, ce mot supplémentaire M' serait obtenu en changeant au moins une lettre du mot choisi par Sophie (donc au moins la $i$ème lettre), mais pas toutes (donc pas la $j$ème lettre). Dans la liste des mots écrits par Sophie, il y en a (au moins) un, appelons-le M_1, qui est obtenu en changeant dans M la $i$ème lettre et $d - 1$ lettres autres que la $j$ème lettre. Considérons alors le mot écrit M_2 qui est obtenu en changeant dans M la $j$ème lettre et les mêmes $d-1$ autres lettres que pour M_1. Ces mots M_1 et M_2 diffèrent exactement par les $i$ème et $j$ème lettres. Mais alors M_1 et M' ont les mêmes $i$ème et $j$ème lettres, et M_2 et M' ont des $i$ème et $j$ème lettres différentes, tandis que les autres lettres coïncident ou diffèrent de la même manière. On obtient donc une contradiction, car le nombre de différences entre M_1 et M' n'est donc pas égal au nombre de différences entre M_2 et M'.

Ont fourni une solution correcte :
L. Abou Merhi (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
I. Audusse (1ère au Lycée Rodin, à Paris),
H. Bernard (1ère au Lycée Stanislas, à Paris),
N. Diouri (1ère au Lycée Sonia Delaunay, à Villepreux),
T. Xu (1ère au Lycée Pierre d'Ailly, à Compiègne),
H. Alves (Tle au Lycée Hoche, à Versailles),
V. Che-He (Tle au Lycée Pierre-Gilles de Gennes-ENCPB, à Paris),
A. Desjardins (Tle au Lycée Blaise Pascal, à Orsay),
H. Dilouya (Tle au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
C. Dinh (Tle au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge),
S. Koch (Tle au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
Q. Rabineau (Tle au Lycée Descartes, à Antony),
G. Partin (L1 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),

Y. Toure (L1 mathématiques-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
S. Jabri (L2 Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
N. Gonde (M1 Biosciences à l'ENS de Lyon, à Lyon),
J. Legrand (2ème année à l'ESPCI, à Paris),
Y. Wang (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
J. Xiao (M1 mathématiques à Sorbonne Université, à Paris),
X. Ye (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Alami (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
A. Lotfi (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
T. Soro (3ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Tardy (M2 MdA à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
P. Revenant (Doctorant à l'ENS de Lyon, à Lyon),
D. Collignon (Chef de Département au Ministère de la Justice/SG/DIR-SG Sud-Est, à Aix-en-Provence),
N. Didrit (Professeur de Mathématiques et Informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
Q. Granier (Master au Technische Universität München , à Munich, 5ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
V. Lefèvre (Chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
C. Lemonnier (Professeure agrégée de mathématiques au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),
A. Lucazeau (Ingénieure, à Sidney),
H. A. Mai (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
C. Romon (Retraité, à Carrières-sur-Seine),
l'équipe formée par K. Caillard (1ère au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine) et A. Tarassov (2nde au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine),
l'équipe formée par S. Marquer Buffon (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye) et A. Zagury (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
l'équipe formée par C. Portes (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye) et E. Ray (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
l'équipe formée par A. Tefridj (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine) et W. Wu (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine),
l'équipe formée par A. Dusoulier (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris) et N. Ismaaili Erny (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris),
l'équipe formée par D. Akproh (1ère bachelor au York University, à Toronto) et S. Bakayoko (Ingénieur diplômé à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles),
l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (Doctorant à l'Université de Rouen, à Rouen) et L. Vanhaelewyn (M2 Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (Doctorant au CMAP, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Baumert (Enseignant au lycée, à Paris) et J. Ishak (Doctorante au LAGA, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse),
l'équipe formée par N. Brigouleix (Enseignant au Lycée Colbert, à Paris) et V. de Daruvar (Enseignant au Lycée Charlemagne, à Paris).

Solution du problème 6 : Soit M_+ le mot qui commence par k fois la lettre A, puis contient k fois la lettre B, et finit par k fois la lettre C ; en d'autres termes, les lettres de M_+ sont ordonnées dans l'ordre alphabétique. Soit M_- le mot qui commence par k fois la lettre C, puis contient k fois la lettre B, et finit par k fois la lettre A ; en d'autres termes, les lettres de M_- sont ordonnées dans l'ordre anti-alphabétique.
Montrons qu'il est possible de transformer M_+ en M_- au moyen de $3k^2$ échanges, mais pas moins. On commence par faire passer les k lettres A à droite des$2k$ lettres B et C, ce qui nécessite $2k^2$ échanges. Puis on fait passer les k lettres C à gauche des k lettres B, ce

qui nécessite k échanges supplémentaires. On a donc utilisé $2k^2 + k^2 = 3k^2$ échanges pour transformer M_+ en M_-.
Réciproquement, étant donné un mot M avec k lettres de chaque sorte, on note $f(M)$ le nombre de paires (i, j) de lettres avec $1 \leq i < j \leq 3k$ telles que la $i$ème lettre vient dans l'alphabet strictement avant la $j$ème lettre. On a donc $f(M_+) = 3k^2$ (par le même comptage que pour les échanges ci-dessus) et $f(M_-) = 0$ (puisque l'ordre est anti-alphabétique). Chaque échange augmente ou diminue la valeur de f d'au plus 1, donc il faut au moins $|f(M_+) - f(M_-)| = 3k^2$ échanges pour transformer M_- en M_+.
Si M et M' sont deux mots avec k lettres de chaque sorte, notons $d(M, M')$ le nombre minimal d'échanges requis pour transformer M en M'. Soit M_1 le mot choisi par Sophie, on a $d(M_+, M_1) + d(M_1, M_-) \geq 3k^2$, car sinon on pourrait transformer M_+ en M_- via M_1 avec moins de $3k^2$ échanges. Donc soit $d(M_+, M_1) \geq 3k^2/2$, auquel cas Gloria peut choisir $M_2 = M_+$, soit $d(M_1, M_-) \geq 3k^2/2$, auquel cas Gloria peut choisir $M_2 = M_-$.

Ont fourni une solution correcte :
R. Missoum (2nde au CNED, à Paris),
H. Bernard (1ère au Lycée Stanislas, à Paris),
C. Sellier Pacheco de Almeida (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
T. Xu (1ère au Lycée Pierre d'Ailly, à Compiègne),
V. Che-He (Tle au Lycée Pierre-Gilles de Gennes-ENCPB, à Paris),
A. Desjardins (Tle au Lycée Blaise Pascal, à Orsay),
C. Dinh (Tle au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge),
L. Foucher (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
J. Zhou (Tle au Lycée Léon Blum, à Créteil),
K. Sahraoui (L2 mathématiques à l'Université d'Avignon, à Avignon),
J. Dourville (L3 à l'ENS, à Paris),
N. Gonde (M1 Biosciences à l'ENS de Lyon, à Lyon),
Y. Wang (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
J. Xiao (M1 mathématiques à Sorbonne Université, à Paris),
X. Ye (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
A. Lotfi (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
T. Soro (3ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Tardy (M2 MdA à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
P. Revenant (Doctorant à l'ENS de Lyon, à Lyon),
D. Collignon (Chef de Département au Ministère de la Justice/SG/DIR-SG Sud-Est, à Aix-en-Provence),
Q. Granier (Master au Technische Universität München , à Munich, 5ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
V. Lefèvre (Chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
C. Lemonnier (Professeure agrégée de mathématiques au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),
H. A. Mai (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
C. Romon (Retraité, à Carrières-sur-Seine),
l'équipe formée par K. Caillard (1ère au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine) et A. Tarassov (2nde au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine),
l'équipe formée par S. Marquer Buffon (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye) et A. Zagury (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
l'équipe formée par A. Tefridj (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine) et W. Wu (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine),
l'équipe formée par A. Dusoulier (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris) et N. Ismaaili Erny (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris),
l'équipe formée par D. Demirer (LDD1 informatique-mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et B. Kunur (LDD1 mathématiques-économie à l'Université Paris-Saclay,

à Orsay),
l'équipe formée par D. Akproh (1ère bachelor au York University, à Toronto) et S. Bakayoko (Ingénieur diplômé à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles),
l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (Doctorant à l'Université de Rouen, à Rouen) et L. Vanhaelewyn (M2 Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (Doctorant au CMAP, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Baumert (Enseignant au lycée, à Paris) et J. Ishak (Doctorante au LAGA, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse),
l'équipe formée par F. Giton (Professeur de mathématiques au Lycée André Malraux, à Gaillon) et Q. Giton (Doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay).

Solution du problème 7 : Appelons A' l'arête du tétraèdre qui n'a pas de sommet en commun avec A. Notons a et a' les longueurs de A et A'. L'arête A est adjacente à deux faces triangulaires du tétraèdre, notons h_1 et h_2 les longueurs des hauteurs de ces faces qui sont perpendiculaires à la base commune A. De même, l'arête A' est adjacente à deux faces triangulaires du tétraèdre, notons h'_1 et h'_2 les longueurs des hauteurs de ces faces qui sont perpendiculaires à la base commune A'. La somme S des surfaces des faces de la boîte est donc donnée par $S = a(h_1 + h_2)/2 + a'(h'_1 + h'_2)/2$. La boîte se décompose en 4 pyramides ayant pour base l'une des faces de la boîte et comme sommet opposé le cercle de la sphère inscrite au tétraèdre. Notons r son rayon, c'est la hauteur de chacune des 4 pyramides, de sorte que le volume V de la boîte est donné par $V = Sr/3$.
D'autre part, considérons le segment qui réalise la plus courte distance d entre un point de A et un point de A'. C'est l'unique segment qui est à la fois perpendiculaire à A et à A'. Le plan contenant A et ce segment découpe la boîte en deux pyramides, dont la base commune est un triangle d'aire $ad/2$. La somme des hauteurs de ces pyramides est $\leq a'$, avec égalité si et seulement si A' est perpendiculaire au plan de coupe. On en déduit donc que $V \leq aa'd/6$. Comme les hauteurs h_1, h_2, h'_1 et h'_2 sont les longueurs de segments joignant des points de A et de A', celles-ci sont toutes $\geq d$.
De tout ceci, on déduit que $rd(a + a')/3 \leq V \leq aa'd/6$, de sorte que $r \leq \frac{aa'}{2(a+a')}$. Comme le rayon 11 du ballon ne dépasse par r et que $a = 40$, on en déduit que $11 \leq \frac{20a'}{40+a'}$ et donc $a' \geq 440/9$. Le plus petit entier $\geq 440/9$ étant $441/9 = 49$, c'est la longueur minimale de A' comme l'a prédit Isabelle.

Ont fourni une solution correcte :
H. Bernard (1ère au Lycée Stanislas, à Paris),
V. Che-He (Tle au Lycée Pierre-Gilles de Gennes-ENCPB, à Paris),
L. Foucher (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
S. Koch (Tle au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
M. Rouault (Tle au Lycée Diderot, à Paris),
Y. Wang (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
X. Ye (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Alami (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
P. Revenant (Doctorant à l'ENS de Lyon, à Lyon),
D. Collignon (Chef de Département au Ministère de la Justice/SG/DIR-SG Sud-Est, à Aix-en-Provence),
A. Lucazeau (Ingénieure, à Sidney),
H. A. Mai (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
C. Romon (Retraité, à Carrières-sur-Seine),
l'équipe formée par A. Tefridj (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine) et W. Wu (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine),
l'équipe formée par M. Baccara (Doctorant au CMAP, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Baumert (Enseignant au lycée, à Paris) et J. Ishak (Doctorante au LAGA, à

l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse).

Solution du problème 8 : Montrons que Maël peut recouvrir au moins 6 points rouges avec son pochoir en le plaçant judicieusement avec ses côtés parallèles à ceux du panneau. Remarquons que si en plaçant le pochoir centré sur un point C celui-ci recouvre le point rouge R, alors en le translatant pour qu'il soit centré sur R il recouvrira C.
L'aire du pochoir est donnée par $4 \times 4 + \pi \times 1^2 = 16 - \pi$. Le côté du panneau est de longueur $\sqrt{2025} = 45$. En translatant le centre du pochoir pour qu'il se trouve successivement en tous les points du panneau, on arrive à recouvrir exactement tous les points d'un carré P' de côté $2 + 45 + 2 = 49$, qui est donc d'aire $49^2 = 2401$. Si on place un pochoir centré sur chacun des 1000 points rouges avec ses côtés parallèles à ceux du panneau, ceux-ci ont une aire totale $1000(16 - \pi)$. Ces aires se recouvrent partiellement plusieurs fois, mais ne dépassent pas du carré P' d'aire 2401. Le ratio de ces aires est $\frac{1000(16-\pi)}{2401} \simeq 5,355\ldots > 5$. On peut donc trouver un point p de P' qui est recouvert par au moins 6 tels pochoirs. En effet, si tout point de P' était recouvert par au plus 5 pochoirs, la somme des aires de tous les pochoirs ne dépasserait pas 5 fois l'aire de P', une contradiction. Par la remarque ci-dessus, un pochoir centré en p recouvrira les points rouges qui sont au centre des pochoirs recouvrant p et qui sont au moins au nombre de 6, comme souhaité.

Ont fourni une solution correcte :
H. Bernard (1ère au Lycée Stanislas, à Paris),
M. Caby (1ère au Lycée Condorcet, à Paris),
V. Che-He (Tle au Lycée Pierre-Gilles de Gennes-ENCPB, à Paris),
S. Koch (Tle au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
J. Dourville (L3 à l'ENS, à Paris),
Y. Wang (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
X. Ye (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
P. Revenant (Doctorant à l'ENS de Lyon, à Lyon),
D. Collignon (Chef de Département au Ministère de la Justice/SG/DIR-SG Sud-Est, à Aix-en-Provence),
V. Lefèvre (Chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
C. Romon (Retraité, à Carrières-sur-Seine),
l'équipe formée par S. Marquer Buffon (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye) et A. Zagury (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
l'équipe formée par A. Tefridj (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine) et W. Wu (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine),
l'équipe formée par M. Baccara (Doctorant au CMAP, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Baumert (Enseignant au lycée, à Paris) et J. Ishak (Doctorante au LAGA, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse),
l'équipe formée par N. Brigouleix (Enseignant au Lycée Colbert, à Paris) et V. de Daruvar (Enseignant au Lycée Charlemagne, à Paris).