Université Paris-Saclay 2020–2021

Agrégation

Exercices Leçon 201

Exercice 1

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on considère

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

Montrer que $S_n(f)$ converge.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$ on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme sup sur $[a,b]$, on note $\mathcal{P}_n$ les fonctions polynôme de degré au plus n sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty$$

est atteint.

Exercice 3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω telle que pour tout compact $K \subset \Omega$, $\sup_n \sup_K |f_n| < +\infty$.

1. Montrer que pout tout compact $K \subset \Omega$, on peut extraire une sous suite $(f_{\varphi(n)})_n$ qui converge uniformément sur K.
2. En déduire qu'il existe une sous suite $(f_{n_k})_k$ qui converge uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$ vers une fonction holomorphe f sur Ω.

Exercice 4

Soit $K \in L^2([0,1] \times [0,1])$, on considère

$$T_K f(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy.$$

1. Montrer que $T_K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ est continu.
2. Montrer que T_K est compact.